Calcul matriciel, DL, EV, continuité, polynômes

L'usage d'une calculatrice est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Cours

1) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner la définition quantifiée des deux limites suivantes :

$$(a)\ \lim_{x\to -1} f(x) = +\infty \qquad (b)\ \lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$$

2) Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de $A = -X^6 + X^5 - 3X + 1$ par $B = X^2 + X - 2$?

Exercices

Exercice 1.

Soit $f : x \mapsto \sqrt{4 + 2x + x^2}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) Étudier les variations de f.
3) Montrer que f possède deux asymptotes obliques dont on donnera les équations.
4) Quelle est la position de la courbe représentative de f par rapport à ses asymptotes ?
5) À l'aide des questions précédentes, donner l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_3$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3) Déduire des deux questions précédentes une formule explicite pour A^n, avec $n \in \mathbb{N}$.
On pourra donner
ou bien chaque coefficient de la matrice A^n en fonction de l'entier n,
ou bien une expression de A^n comme combinaison linéaire de A et I_3.

4) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
Indication : on pourra être astucieux...

Exercice 3.

Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x\sin(x)$.

1) Montrer que l'équation $x\sin(x) = 1$ possède, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, une unique racine dans l'intervalle $I_n = \left]2n\pi ; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right[$, notée x_n.
2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
3) On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_n - 2n\pi$.
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sin(y_n) = \dfrac{1}{x_n}$.
   b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.
   c) Donner un équivalent de y_n lorsque $n \to +\infty$.
4) Montrer que $x_n = 2n\pi + \dfrac{1}{2n\pi} + \dfrac{a}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ où on précisera la valeur du réel a.

Exercice 4.

Dans tout l'exercice on se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On définit de plus l'application $f : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \to & E \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & f(M) = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \end{array} \right.$

et les ensembles $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$.

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2) Montrer que f est un endomorphisme de E.
3) Montrer plus particulièrement que f est une symétrie dont on donnera les sous-espaces caractéristiques.
4) Montrer que quelle que soit la matrice $M \in E$, il existe une unique matrice $A \in F$ et une unique matrice $B \in G$ telles que $M = A + B$.
5) ***Application numérique*** : soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.
   Donner les matrices A et B définies à la question précédente.

Exercice 5.

1) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0;1])$ (autrement dit, f est continue de $[0;1]$ dans $[0;1]$).
   Montrer qu'il existe $x \in [0;1]$ tel que $f(x) = x$.
2) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On suppose de plus qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f\big(f(a)\big) = a$.
   Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$.
3) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ décroissante sur $\mathbb{R}$.
   Montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$.