

Correction DS n°5

Exercice 1.

1) $f(x)$ est définie si et seulement si $x^2 + 2x + 4 \geq 0$.

Or $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$ donc f est définie sur \mathbb{R} .

2) Pour la même raison, f est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2 + 2x}{2\sqrt{4 + 2x + x^2}} = \frac{1 + x}{\sqrt{4 + 2x + x^2}} \text{ qui est du signe de } x + 1.$$

Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty; -1]$ et strictement croissante sur $[-1; +\infty[$.

3) Effectuons un développement asymptotique de f au voisinage de $\pm\infty$: posons $h = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{1}{h}\right) \\ &= \sqrt{4 + \frac{2}{h} + \frac{1}{h^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + 2h + 4h^2}{h^2}} \\ &= \frac{1}{|h|} (1 + 2h + 4h^2)^{1/2} \\ &= \frac{1}{|h|} \left(1 + \frac{2h + 4h^2}{2} - \frac{(2h)^2}{8} + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \right) \end{aligned}$$

Au voisinage de $x \rightarrow +\infty$, $|x| = x$ donc :

$$f(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Au voisinage de $x \rightarrow -\infty$, $|x| = -x$:

$$f(x) = -x - 1 - \frac{3}{2x} + o_{x \rightarrow -\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$

et la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

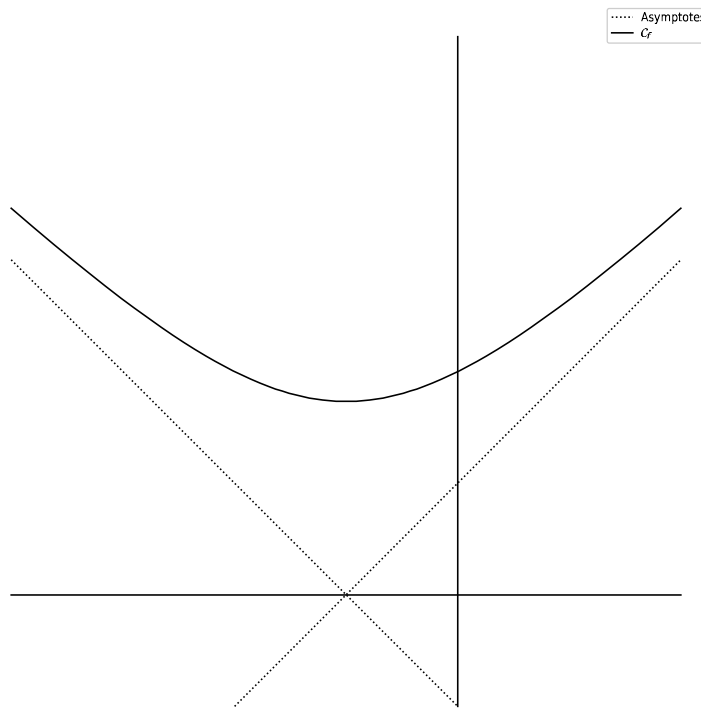
4) Au voisinage de $x \rightarrow +\infty$:

$$f(x) - (x + 1) = \frac{3}{2x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \text{ donc } \mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de son asymptote.}$$

Au voisinage de $x \rightarrow -\infty$:

$$f(x) - (-x - 1) = -\frac{3}{2x} + o_{x \rightarrow -\infty}\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \text{ donc } \mathcal{C}_f \text{ est là encore au-dessus de son asymptote.}$$

5) Allure de la courbe représentative de f :



Exercice 2.

$$1) A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \\ 9 & 9 & 10 \end{pmatrix} = -2I_3 + 3A.$$

En posant $a = 3$ et $b = -2$, on a bien $A^2 = aA + bI_3$.

- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons le reste R dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
 $\deg(R) < 2$ donc $R = r_0 + r_1X$ et en notant Q le quotient de la division euclidienne,
 $X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + R$.

De plus, $X^2 - 3X + 2 = (X - 2)(X - 1)$.

En évaluant en 1, on a donc $1 = 0 + R(1) = r_0 + r_1$.

En évaluant en 2, on obtient $2^n = 0 + R(2) = r_0 + 2r_1$.

Par soustraction, on obtient donc $2^n - 1 = r_1$, et en remplaçant dans la première équation,
 $r_0 = 2 - 2^n$.

Donc $R = 2 - 2^n + (2^n - 1)X$.

- 3) D'après la question précédente, en substituant X par la matrice A , on a :

$$A^n = (A^2 - 3A + 2I_3)Q(A) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3.$$

Or d'après la question 1), $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$.

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3$$

- 4) D'après la question 1) à nouveau $A^2 - 3A = -2I_3$, c'est-à-dire $A\left(\frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}A\right) = I_3$
et de même $\left(\frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}A\right)A = I_3$ en factorisant à droite par A .

Donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

- 1) Soit n un entier naturel et $f : x \in]2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi[\mapsto x \sin(x) - 1$.
 f est bien définie, continue et dérivable sur I_n et
 $\forall x \in I_n, f'(x) = \sin(x) + x \cos(x)$ qui est positive car sur I_n , \cos et \sin sont positives.
Donc f est strictement croissante, continue, $f(2n\pi) = -1$ et $f(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - 1 > 0$
donc
pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique racine dans l'intervalle $I_n =]2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi[$,
notée x_n à l'équation $x \sin(x) = 1$.
- 2) Par définition, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 2n\pi$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.
- 3) On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}, y_n = x_n - 2n\pi$.
 - a) Par définition, pour tout entier naturel $n, x_n \sin(x_n) = 1$, donc $\sin(x_n) = \frac{1}{x_n}$.
Or $\sin(x_n) = \sin(x_n - 2n\pi) = \sin(y_n)$ car \sin est 2π -périodique.
Donc, pour tout entier naturel $n, \sin(y_n) = \frac{1}{x_n}$.
 - b) Par définition, $0 < y_n < \frac{\pi}{2}$.
En utilisant le résultat de la question précédente, on a donc $y_n = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{x_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ et que Arcsin est continue en 0.
 - c) D'une part, par définition, $x_n = 2n\pi + y_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ donc $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n\pi$.
D'autre part, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$.
Donc $\text{Arcsin}(x) = x + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$ (car $\text{Arcsin}(0) = 0$, en primitivant).
Donc $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n\pi}$ en utilisant le résultat de la question précédente.
- 4) En réutilisant la démarche de la question précédente, on peut donc affirmer :
 - $x_n = 2n\pi + \frac{1}{2n\pi} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$;
 - $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{2n\pi + \frac{1}{2n\pi} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2n\pi} \times \left(1 - \frac{1}{4n^2\pi^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.
Ou encore $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{8n^3\pi^3} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.
 - Donc $y_n = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{8n^3\pi^3} + \frac{1}{48n^3\pi^3} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.
Après simplification : $y_n = \frac{1}{2n\pi} - \frac{5}{48n^3\pi^3} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.
 - Finalement, $x_n = 2n\pi + y_n = 2n\pi + \frac{1}{2n\pi} - \frac{5}{48n^3\pi^3} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.
Ce qu'il fallait démontrer, en posant $a = \frac{-5}{48\pi^3}$.

Exercice 4.

1) $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$, donc est un sous-espace vectoriel de E .

De même $G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$, donc est un sous-espace vectoriel de E .

2) f est bien défini sur E , à valeurs dans E .

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ et $N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in E$, λ, μ deux réels,

$$f(\lambda M + \mu N) = \begin{pmatrix} \lambda d + \mu \delta & \lambda c + \mu \gamma \\ \lambda b + \mu \beta & \lambda a + \mu \alpha \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Donc $f(\lambda M + \mu N) = \lambda f(M) + \mu f(N)$.

f est bien un endomorphisme de E .

3) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$.

$$f \circ f(M) = f \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Donc f est une symétrie.

Calculons $\text{Ker}(f - \text{id})$ et $\text{Ker}(f + \text{id})$.

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f - \text{id}) \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow (a = d \text{ et } b = c) \Leftrightarrow M \in F$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f + \text{id}) \Leftrightarrow f(M) = -M \Leftrightarrow (a = -d \text{ et } b = -c) \Leftrightarrow M \in G$$

Donc f est la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

4) D'après la question précédente, f est la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Donc $F \oplus G = E$ (par définition des symétries).

Donc quelle que soit la matrice $M \in E$, il existe une unique matrice $A \in F$ et une unique matrice $B \in G$ telles que $M = A + B$ (par définition de la somme directe).

5) **Application numérique** : soit $M = A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\text{Par définition des symétries, } f(M) = A - B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } 2A = M + f(M) = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ donc } A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Et } B = M - A = \begin{pmatrix} -4 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

1) Posons $g : x \in [0; 1] \mapsto f(x) - x$.

g est la différence de deux fonctions continues, donc est continue.

Par ailleurs, $g(0) = f(0) \geq 0$ car $f([0; 1]) \subset [0; 1]$

et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ pour la même raison.

Donc g change de signe, donc il existe $x \in [0; 1]$ tel que $f(x) = x$.

2) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On suppose de plus qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(f(a)) = a$.

Notons $b = f(a)$.

- si $b = a$, on a trouvé un réel x (ici a) tel que $f(x) = x$;
- si $b > a$, posons $g : x \in [a; b] \mapsto f(x) - x$. g est continue.

De plus, $g(a) = f(a) - a = b - a > 0$

et $g(b) = f(b) - b = f(f(a)) - b = a - b < 0$.

Donc g est continue, change de signe, donc il existe un réel $x \in]a; b[$, tel que $f(x) = x$;

- enfin, si $b < a$, en posant $g : x \in [b; a] \mapsto f(x) - x$, le raisonnement du point précédent conduit encore à

il existe un réel $x \in]b; a[$, tel que $f(x) = x$.

Dans tous les cas, il existe donc un réel x tel que $f(x) = x$.

3) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ décroissante sur \mathbb{R} .

Posons $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) - x$.

Soit $a < b$. $g(b) - g(a) = f(b) - f(a) - b + a \leq a - b$ car f est décroissante.

Or $a < b$, donc $g(b) - g(a) < 0$. Ceci étant valable pour tout couple $(a; b)$ de réels tels que $a < b$, on peut donc affirmer que g est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

Par ailleurs, d'après le théorème de la limite monotone, f étant décroissante,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ existe et appartient à $] -\infty; +\infty]$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe et appartient à $[-\infty; +\infty[$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ (par opération sur les limites)

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Donc, g est continue, strictement décroissante, et change de signe,

donc il existe une unique réel x tel que $f(x) = x$.