Programme de colles n°22

Du 30 mars au 3 avril

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer

1) Donner la définition d'un hyperplan.
   Énoncer (sans démonstration) le théorème (15.4) de résolution des équations linéaires.
2) Définition d'une famille libre, liée. Énoncer (sans démonstration) le théorème (15.6) de caractérisation des familles libres.
3) Définition d'une famille génératrice, d'une base. Démontrer l'existence et l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base.
4) Définition et propriété (sans démonstration) d'une famille de polynômes échelonnée en degrés.
5) Énoncer (sans démonstration) la propriété de génération de la somme.
6) Énoncer (sans démonstration) les théorèmes de la base extraite (15.19) et de la base incomplète (15.21).
7) Énoncer le théorème de la dimension (15.24) et la définition de la dimension d'un espace vectoriel (15.26).
8) Énoncer les propriétés (15.28, 15.29) des familles libres/génératrices en dimension finie.
9) Donner la définition des bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
10) Définition du rang d'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel. Théorème (15.34) énonçant le lien entre liberté et rang d'une famille de vecteurs.
11) ***Révisions : suites récurrentes linéaires d'ordre 2 et suites arithmético-géométriques.***
12) ***Dimension d'un sous-espace vectoriel : propriété et cas d'égalité (proposition 15.35).***
13) ***Définition du rang d'une famille de vecteurs.***
    Calculer le rang d'une famille (au choix du colleur, par exemple dans $\mathbb{R}^4$ ***ou*** $\mathbb{R}_3[X]$***).***
14) ***Énoncé (précis) de la formule de Grassmann.***
15) ***Énoncer le théorème (15.39) de définition d'une application linéaire à l'aide des images d'une base de l'espace de départ.***
    Donner l'expression de $\phi(x;y)$ ***pour*** $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ ***définie par***

$$\phi(1;0) = \left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \textbf{\textit{et}} \quad \phi(0;1) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$$

(ou autres images choisies par le colleur)

16) ***Énoncer (sans démonstration) le théorème (15.46) caractérisant les isomorphismes par l'image d'une base et son corollaire (15.47).***

17) ***Énoncer (sans démonstration) la formule du rang. Énoncer (sans démonstration) le corollaire donnant la dimension d'un hyperplan*** H ***d'un e.v.*** E ***de dimension finie.***

18) ***Énoncer (sans démonstration) le théorème (15.53) de caractérisation des isomorphismes en dimension finie.***

Programme pour les exercices

Espaces vectoriels : révisions du chapitre précédent (sev, ev engendrés, somme (directe) de deux sev, sev supplémentaires, applications linéaires, noyau/image, projections, symétries).
Espaces vectoriels : équations linéaires, familles libres/liées/génératrices, bases, coordonnées dans une base, rang d'une famille de vecteurs.
Dimension d'un sous-espace vectoriel, formule de Grassmann.
Applications linéaires en dimension finie : image d'une base par un isomorphisme, formule du rang, hyperplans, caractérisation des isomorphismes en dimension finie.