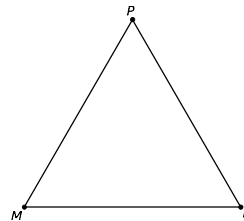
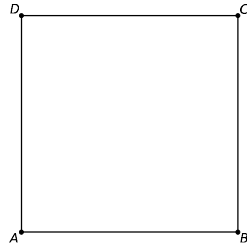


Espaces vectoriels de dimension finie, dénombrement, matrices

Exercice 1.



Partie A - Chemins sur un carré

On considère le carré $ABCD$ ci-dessus. On cherche à dénombrer les **chemins** partant du point A et possédant n pas.

On entend par **chemin** toute **liste de sommets adjacents du carré** commençant par le sommet A .

On peut aussi représenter un chemin **par un mot** de n lettres composé des lettres H ou V suivant que les pas effectués sont **horizontaux** ou **verticaux**.

Par exemple, il y a 4 chemins à 2 pas qui sont :

- en les notant comme une liste de sommets adjacents : ABA , ABC , ADC et ADA ;
- en les notant comme un mot de deux lettres prises dans l'alphabet $\{H;V\}$: HH , HV , VH , VV .

- 1) Donner tous les chemins à trois pas en utilisant une notation de votre choix.
- 2) Combien y a-t-il de chemins à n pas sur le carré ?
- 3) Combien y a-t-il de chemins à n pas se terminant sur le sommet A ?

Partie B - Chemin sur un triangle

On considère désormais les chemins sur le triangle MNP ci-dessus **partant du point M** .

De même que précédemment, on définit deux notations pour un chemin :

- comme une liste de sommets adjacents (en commençant par le sommet M) : $MNMP$ par exemple ;
- comme un mot de n lettres choisies dans l'alphabet $\{T;H\}$ (pour sens **Trigonométrique** ou sens **Horaire**) : THH par exemple.

- 1) Donner tous les chemins à deux pas sur le triangle en utilisant une notation de votre choix.

- 2) Donner tous les chemins à trois pas en utilisant une notation de votre choix.
- 3) Combien y a-t-il de chemins à n pas sur le triangle ?
- 4) Donner tous les chemins à 2 pas sur le triangle qui se terminent sur le sommets M .
- 5) Même question pour les chemins à 3, 4 et 5 pas.

6) On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = J - I$ la **matrice d'adjacence** du

triangle MNP considéré comme un graphe à trois sommets.

- a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, K^n en utilisant la formule du binôme.
- b) En déduire le nombre de chemins à n pas sur le triangle qui se terminent sur le sommet M .

Exercice 2.

On appelle **carré magique** toute matrice telle que les sommes des éléments de chaque ligne, de chaque colonne et de chacune des diagonales soient égales.

Par exemple

3	8	1
2	4	6
7	0	5

 est un carré magique, la somme des lignes/colonnes/diagonales étant égale à 12.

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^9$ où on identifie les carrés magiques à des 9-uplets de nombres réels. On note F l'ensemble de tous les carrés magiques vu comme un sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ou de \mathbb{R}^9 : $F \subset E$.

Pour un carré magique C , on notera $c_{1,1}, c_{2,1}, \dots, c_{3,3}$ ses coefficients ou, indifféremment, c_1, c_2, \dots, c_9 , ordonnés de la façon suivante :

$$C = \begin{array}{|c|c|c|} \hline c_1 & c_4 & c_7 \\ \hline c_2 & c_5 & c_8 \\ \hline c_3 & c_6 & c_9 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ \hline c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ \hline c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \\ \hline \end{array}$$

- 1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
- 2) Soit $\phi : (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x + y + z \in \mathbb{R}$.
Montrer que ϕ est linéaire, calculer $\text{rg } \phi$ puis $\dim \text{Ker } \phi$.

3) Soit $J = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$.

Montrer que $C \in \mathbb{R}^9$ est un carré magique si et seulement si $\exists c \in \mathbb{R}, C = cJ + D$ où D est un carré magique dont les sommes (par ligne, par colonne ou par diagonale) sont nulles.

On note F_0 l'ensemble des carrés magiques de sommes nulles.

- 4) Montrer que F_0 est un sous-espace vectoriel de F .
- 5) Soit $\psi : M \in \mathbb{R}^9 \mapsto (\phi(L_1); \phi(L_2); \phi(L_3); \phi(C_1); \phi(C_2); \phi(C_3); \phi(D_1); \phi(D_2)) \in \mathbb{R}^8$
où L_1 est la première ligne de M vue comme matrice, C_1 sa première colonne, D_1 sa première diagonale, etc...

En remarquant que $F_0 = \text{Ker } \psi$ montrer que $\dim F_0 = 2$.

- 6) Donner une base de F .