

Ensembles, applications, dénombrément

I. Ensembles et applications

Ex. 16.1 (Cor.) Soient $f : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n + 1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ 0 \mapsto 0 \\ n > 0 \mapsto n - 1 \end{cases}$

1. Injectivité, surjectivité, bijectivité éventuelles de f et g .
2. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$, puis étudier leur injectivité, surjectivité, bijectivité éventuelles.

Ex. 16.2 (Cor.) Soit E un ensemble et $p : E \rightarrow E$ telle que $p \circ p = p$. Montrer que si p est injective ou surjective, alors $p = \text{Id}_E$.

II. Dénombrément

Ex. 16.3 Quel est le nombre de couples $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tels que :

1. $i < j$? c) $i = j^2$?
2. $i \leq j$?

Ex. 16.4 (Cor.)

1. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot MATHS, puis du mot EUCLIDE.
2. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot BANANE, puis du mot MISSISSIPI.

Ex. 16.5 Déterminer le nombre d'anagrammes des mots ABAISSER, RESSASSER, ASSASSINAT.

Ex. 16.6 Soient n et p deux entiers naturels.

1. Combien y a-t-il de mots formés de n lettres A et p lettres B ?
2. Dénombrer les ensembles suivants en les représentant par des ensembles de mots :

A. Deux joueurs s'affrontent dans un match en n sets gagnants. On appelle *partie* la liste des scores du début jusqu'à la fin du match. Par exemple, $((0; 0); (1; 0); (2; 0); (2; 1); (3; 1))$ est une partie possible dans un match en 3 sets gagnants (et cette partie a été remportée par le premier joueur).

Combien y a-t-il de parties possibles remportées par le premier joueur ?

Combien y a-t-il de parties possibles ?

Combien y a-t-il de parties possibles remportées par le premier joueur avec au moins deux sets d'écart ?

B. On appelle *décomposition de n en p entiers* toute p -liste d'entiers positifs ou nuls $(a_1; a_2; \dots; a_p)$ dont la somme

$$\sum_{k=1}^p a_k \text{ vaut } n.$$

Par exemple $(5; 0; 2; 1)$ est une décomposition de 8 en 4 entiers.

Combien y a-t-il de décomposition de n en p entiers ?

Ex. 16.7 Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

1. Combien y a-t-il de parties A de E de cardinal $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$?
2. Quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(E)$?
3. Combien y a-t-il de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$?
4. Combien y a-t-il de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que :
 - A. $A \cup B = E$?
 - B. $A \cap B = \emptyset$?
 - C. $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$?

Ex. 16.8 Permutations de couples On doit placer autour d'une table ronde un groupe de $2n$ personnes, n hommes, n femmes, qui constituent n couples. On considère que deux tables sont identiques si on peut passer de l'une à l'autre par une rotation, une symétrie axiale ou la composée d'une rotation et d'une symétrie axiale.

1. Combien y a-t-il de tables possibles ?
2. Combien y a-t-il de tables possibles respectant l'alternance des sexes ?
3. Combien y a-t-il de tables possibles ne séparant pas les couples ?
4. Combien y a-t-il de tables possibles respectant les deux conditions précédentes ?

Ex. 16.9 On appelle opération interne sur un ensemble E toute application de $E \times E$ dans E .

Par exemple $*$ définie par $0 * 0 = 1$, $0 * 1 = 1$, $1 * 0 = 0$ et $1 * 1 = 1$ est une opération interne sur $\llbracket 0; 1 \rrbracket$.

1. Combien existe-t-il d'opérations internes sur un ensemble à n éléments ?
2. Combien sont commutatives ?
3. Combien possèdent un élément neutre ?
4. Combien sont commutatives et possèdent un élément neutres ?

Ex. 16.10 On appelle *marche aléatoire* dans \mathbb{Z} toute famille (finie) $\mathcal{M} = (m_1; m_2; \dots; m_n)$ d'entiers telle que

- $m_1 = 0$;
- $\forall i \in \llbracket 2; n \rrbracket, |m_i - m_{i-1}| = 1$.

Un couple $(m_i; m_{i+1})$ est alors appelé *pas* de la marche aléatoire.

1. Combien y a-t-il de mots de $2n$ lettres formés de n lettres D et de n lettres G ?
2. Combien y a-t-il de marches aléatoires de $2n$ pas se terminant sur 0 ?

III. Calculs de sommes finies

Ex. 16.11 Pour tout entier $n \geq 3$, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ par : « il existe $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{N}^{*n}$ tel que $u_1 < u_2 < \dots < u_n$ et

$$1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k}. \text{ »}$$

1. Analyse du cas $n = 3$: on suppose qu'il existe $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{N}^{*3}$ tel que $u_1 < u_2 < u_3$ et $1 = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}$.
A. Montrer que $u_1 < 3$. En déduire la valeur de u_1 .
B. Trouver les valeurs de u_2 et u_3 .
2. Montrer que $\mathcal{P}(4)$ est vraie et trouver tous les quadruplets qui satisfont cette propriété.
3. Montrer par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 3$.

Ex. 16.12 (Cor.) Formule d'inversion Soient $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels (ou complexes).

On pose pour tout entier n , $y_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k$.

Montrer que pour tout entier n , $x_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k$.

Existe-t-il une suite z vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_k = (-1)^n$? Si oui, donner z_n en fonction de n .

Ex. 16.13 [*] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $q \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$ on a :

$$\sum_{k=q}^p (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{q} = 0$$

2. On note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; p \rrbracket$.
A. Que dire de $S_{n,p}$ si $n < p$?
B. Déterminer $S_{n,1}$ et $S_{n,n}$.

C. Calculer $S_{n,2}$.

D. Montrer que pour tout $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $S_{n,p} = p^n - \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} S_{n,k}$.

E. En déduire que $S_{n,p} = \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

3. On note D_n le nombre de bijections de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans lui-même sans point fixe. On pose $D_0 = 1$.

A. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$.

B. En déduire que $D_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k!$.

(Voir exercice 16.12 concernant le lien entre les deux questions précédentes)

Corrections

Cor. 16.1 :

1. f est injective mais pas surjective : en effet

- soit n, m tels que $f(n) = f(m)$. Alors $n + 1 = m + 1$ donc $n = m$: f est injective.
- 0 n'a pas d'antécédent pas $f : f(n) = 0 \Rightarrow n + 1 = 0 \Rightarrow n = -1$. Or $-1 \notin \mathbb{N}$.

g est surjective mais pas injective. En effet :

- Soit $m \in \mathbb{N}$, on cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $g(n) = m$. Supposons $n > 0$: $m = n - 1 \Leftrightarrow n = m + 1$.
Donc m possède au moins un antécédent par g , c'est $m + 1$.
- $g(0) = 0 = g(1)$ donc g n'est pas injective.

2. Soit $n \in \mathbb{N} : g \circ f(n) = g(f(n)) = g(n + 1) = n$ (car $n + 1 > 0$).

Donc $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$ qui est bijective.

$$f \circ g(n) = f(g(n)) = \begin{cases} f(n-1) = n & \text{si } n > 0 \\ f(0) = 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Notamment, $f \circ g(n) > 0$ pour tout entier n : donc $f \circ g$ n'est pas surjective (0 n'est jamais atteint),

et $f \circ g(0) = 1 = f \circ g(1)$: donc $f \circ g$ n'est pas injective.

Cor. 16.2 :

- Si p est surjective, alors $\forall y \in E, \exists x \in E, p(x) = y$.
Soit $y \in E$ et x un antécédent.
Alors $p(y) = p(p(x)) = p \circ p(x) = p(x)$ par $p \circ p = p$.
Donc $p(y) = y$.
Finalement $\forall y \in E, p(y) = y$ c'est-à-dire $p = \text{Id}_E$.
- Si p est injective, on a $\forall x \in E, p \circ p(x) = p(p(x)) = p(x)$ et comme p injective, $p(x) = x$. A nouveau $p = \text{Id}_E$.

Cor. 16.4 :

1. MATHS est composé de 5 lettres **distinctes**.

Il y a donc autant d'anagrammes du mot MATHS que de **permutations de ses lettres**.

Il y a donc $5! = 120$ anagrammes du mot MATHS.

Au contraire, dans EUCLIDE, il y a deux lettres E. Échanger ces deux E ne change pas le mot.

On adopte alors une autre méthode pour compter le nombre d'anagrammes d'EUCLIDE.

Choisir un anagramme d'EUCLIDE, c'est :

- Choisir la position des deux E parmi sept positions possibles : $\binom{7}{2} = 21$ positions pour les deux E.
- **PUIS** choisir la position du U : 5 choix restants.
- **PUIS** choisir la position du C : 4 choix restants.
- **PUIS** choisir la position du L : 3 choix restants.
- **PUIS** choisir la position du I : 2 choix restants.
- **PUIS** placer le D dans la seule position restante.

En tout, il y a donc $5! \times 21 = 2520$ anagrammes du mot EUCLIDE.

2. De la même manière que dans la question précédente :

Choisir un anagramme de BANANE, c'est :

- Choisir la position des deux A parmi six positions possibles : $\binom{6}{2} = 15$ positions pour les deux A.
- **PUIS** la position des deux N parmi quatre positions restantes : $\binom{4}{2} = 6$ positions pour les deux N.
- **PUIS** choisir la position du B : 2 choix restants.
- **PUIS** placer le E dans la seule position restante.

En tout, il y a donc $15 \times 6 \times 2 = 180$ anagrammes du mot BANANE.

Choisir un anagramme de MISSISSIPI, c'est :

- Choisir la position des quatre S parmi dix positions possibles : $\binom{10}{4} = 210$ positions pour les quatre S.
 - **PUIS** la position des quatre I parmi six positions restantes : $\binom{6}{4} = 15$ positions pour les quatre I.
 - **PUIS** choisir la position du M : 2 choix restants.
 - **PUIS** placer le P dans la seule position restante.
- En tout, il y a donc $210 \times 15 \times 2 = 6300$ anagrammes du mot MISSISSIPI.

Cor. 16.12 : Montrons-le par *récurrence forte*.

Initialisation :

Pour $n = 0$, par définition, $y_0 = x_0$ donc $x_0 = \sum_{k=0}^0 (-1)^{-k} \binom{0}{k} y_k$ (la somme ne comporte qu'un seul terme, et c'est y_0).

Hérédité :

Supposons la propriété vraie *pour tout entier k inférieur à un rang $n \in \mathbb{N}$ donné*.

Par définition, $y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x_k = x_{n+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} x_k$.

Donc, $x_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} x_k$.

Or, par hypothèse de récurrence, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $x_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} y_i$.

Donc :

$$x_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} y_i$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} y_i$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} y_i$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = y_{n+1} + \sum_{i=0}^n (-1)^{1-i} y_i \left[\sum_{k=i}^n \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} (-1)^k \right]$$

Il s'agit donc de montrer que $\sum_{k=i}^n \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} (-1)^k = (-1)^n \binom{n+1}{i}$.

$$\text{Or } \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \times \frac{k!}{i!(k-i)!}$$

$$\text{puis } \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} = \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} \times \frac{(n+1-i)!}{(n+1-k)!(k-i)!}$$

$$\text{Donc } \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} = \binom{n+1}{i} \binom{n+1-i}{k-i}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \sum_{k=i}^n \binom{n+1}{k} \binom{k}{i} (-1)^k &= \sum_{k=i}^n \binom{n+1}{i} \binom{n+1-i}{k-i} (-1)^k \\ &= \binom{n+1}{i} \sum_{k=i}^n \binom{n+1-i}{k-i} (-1)^k \\ &= \binom{n+1}{i} \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n+1-i}{k} (-1)^{k+i} \\ &= \binom{n+1}{i} (-1)^i \left((-1)^{n-i} + \sum_{k=0}^{n+1-i} \binom{n+1-i}{k} (-1)^k \right) \\ &= \binom{n+1}{i} (-1)^i \left((-1)^{n-i} + (1-1)^{n+1-i} \right) \\ &= \binom{n+1}{i} (-1)^n \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Conclusion : ça marche !

La seconde question est une application immédiate de cette formule.