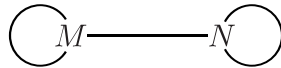


Algèbre linéaire, matrices, dénombrement

Exercice 1.

Marche aléatoire sur un graphe

On considère le graphe non orienté ci-dessous, composé de 2 sommets $\{M; N\}$ et de 3 arêtes $\{(M; M); (M; N); (N; N)\}$.



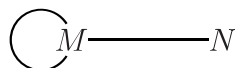
Une marche aléatoire sur ce graphe est une suite d'arêtes consécutives commençant sur le sommet M . Chaque arête de la marche est appelée ***pas***.

Une marche aléatoire pourra être donnée sous deux formes :

- la famille des sommets visités, qu'on convient de représenter sans parenthèses ni virgules ;
- un mot formé des lettres C et R suivant qu'à chaque pas on ***C***hange de sommet ou on ***R***este sur le même sommet.

Par exemple, une marche aléatoire possible à 2 pas est MMN (sous forme de famille) ou RC (sous forme de mot).

- 1) Donner, sous la forme de familles, toutes les marches aléatoires **à 2 pas** sur ce graphe.
- 2) Donner, sous la forme de mots, toutes les marches aléatoires **à 2 pas** sur ce graphe.
- 3) Combien y a-t-il de marches aléatoires **à 3 pas** sur ce graphe ?
- 4) Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Combien y a-t-il de marches aléatoires **à n pas** sur ce graphe ?
 - b) Combien y a-t-il de marches aléatoires **à n pas** sur ce graphe se terminant sur le sommet M ?
- 5) Refaire les questions 3) et 4) pour le graphe suivant :



Exercice 2.

Les résultats de la partie A pourront être utilisés dans la partie B *mais ce n'est pas obligatoire*.

PARTIE A

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer A^2 puis A^3 .
- 2) En déduire que A est inversible et donner l'expression de A^{-1} .

PARTIE B

Dans tout ce qui suit, on considère les fonctions

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{-x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \end{cases} \text{ et } g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{-x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \end{cases}.$$

On définit l'espace vectoriel $E = \text{Vect}(f; g; \exp)$ (on ne demande pas de montrer qu'il s'agit bien d'un espace vectoriel).

Enfin, on notera Δ l'application linéaire qui à une fonction dérivable associe sa dérivée (on ne demande pas de montrer que Δ est bien linéaire).

- 1) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f; g; \exp)$ est libre.
- 2) En déduire $\dim(E)$.
- 3) Montrer que Δ est bien définie sur E et que $\forall u \in E, \Delta(u) \in E$.
- 4) **Pour cette question, on pourra utiliser les résultats de la Partie A** (mais ce n'est pas obligatoire).
Soit $u \in E$. Calculer $\Delta \circ \Delta \circ \Delta(u)$.
- 5) Déduire des questions précédentes que Δ est un automorphisme de E .
- 6) **Pour cette question, on pourra utiliser les résultats de la Partie A** (mais ce n'est pas obligatoire).
Donner l'ensemble des primitives de f et l'ensemble des primitives de g .