

ENAC 2026 - sous réserve que je n'aie fait aucune erreur
moi-même

François Coulombeau

coulombeau@gmail.com

Lycée La Fayette, Clermont-Ferrand (63)

2 avril 2026

- 1) En termes géométriques, $|x - 1| + |x + 2| = 1$ signifie $d(x; 1) + d(x; -2) = 1$ où $d(a; b)$ est la distance de a à b .

Il n'y a évidemment aucune solution possible puisque $d(1; -2) = 3$.

Une seule bonne réponse : B.

- 2) À nouveau, l'interprétation géométrique permet d'affirmer sans calcul que tout réel vérifie $|x - 1| + |x + 2| \geq 1$.

Une seule bonne réponse : C.

- 3) Deux stratégies possibles ici : ou bien résoudre $S : \begin{cases} (x + iy)^2 = 4 + 3i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \end{cases}$, ou bien tester les solutions proposées.

Je traite la première méthode :

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 2xy = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 9 \\ 2xy > 0 \\ 2y^2 = 1 \end{cases}$$

On en déduit qu'il y a deux solutions $\delta = \frac{3+i}{\sqrt{2}}$ et $-\delta$.

Deux réponses : A et C.

- 4) $\Delta = \frac{3}{2} \times (2i) + 4 = 4 + 3i = \delta^2$ où δ a été obtenu à la question précédente.

$$\text{Donc } z_{1,2} = \frac{\sqrt{3} + i\sqrt{3} \pm (3 + i)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \pm 3 + i(\sqrt{3} \pm 1)}{2\sqrt{2}}.$$

Aucune réponse : cocher la case E.

- 5) $\Delta = 2it^2 + 4$ est non nul pour tout réel t . La réponse A est donc juste.

En revanche, si l'on suppose t complexe, pour $t = \pm(1+i)$, $\Delta = 0$ et l'ensemble des solutions de l'équation est un singleton. La réponse B est elle aussi juste.

Il ne peut y avoir que 2 réponses justes, donc

Deux bonnes réponses : A et B.

$$6) I_1 = \int_0^1 1 - t^3 dt = \left[t - \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Aucune bonne réponse : cocher la case E.

$$7) \int_0^1 t^3 (1 - t^3)^n dt = \int_0^1 (t^3 - 1 + 1)(1 - t^3)^n dt = -I_{n+1} + I_n.$$

Une seule bonne réponse : D.

8) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 1 \times (1 - t^3)^{n+1} dt \\ &= \left[t(1 - t^3)^{n+1} \right]_0^1 + \int_0^1 t \times (n+1)3t^2 (1 - t^3)^n dt \\ &= 3(n+1) \int_0^1 t^3 (1 - t^3)^n dt \end{aligned}$$

Donc $I_{n+1} = 3(n+1)(I_n - I_{n+1})$, c'est-à-dire $I_{n+1} = \frac{3(n+1)}{3n+4} I_n$ (à l'aide de la question précédente).

Une seule bonne réponse : A.

$$9) f_n(x) = \int_0^1 (1 - xt^3)^n dt = \int_0^1 (-1)^n x^n t^{3n} + \dots dt \text{ l'intégrale portant sur la variable } t.$$

Donc, une fois primitivé, le terme de plus haut degré en x sera $f_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{3n+1} + \dots$
 $f_n(x)$ est donc une fonction polynomiale de degré n en x .

Une seule bonne réponse : D.

$$10) \text{ Le calcul précédent prouve que le coefficient dominant est } \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Une seule bonne réponse : D.

11) Calculons I_n :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (1 - t^3)^n dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k t^{3k} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{3k} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \times \frac{1}{3k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{3k+1} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Une seule bonne réponse : C.

12)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

Et pas loin d'être du ressort du programme de 2^{ème} année...

Nous verrons en fin d'année que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ (partie paire)

et que $\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ (partie impaire).

Donc $S = \text{ch}(1)$ et $T = \text{sh}(1)$ et $S + T = e^1 = e$.

Une seule bonne réponse : C.

13) D'après ce qui précède,

Aucune bonne réponse : cocher la case E.

14)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

C'est le chapitre sur les séries, que l'on ne peut faire avant la fin d'année.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ne permet pas d'affirmer que $\sum u_n$ converge. Un contre-exemple simple est

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty \text{ bien que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

La réponse A est donc fautive, et pour la même raison, la réponse C est aussi fautive.

La réponse D est aussi fautive puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ est synonyme de $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)$.

En revanche, la réponse B est juste : en effet,

$$\sum_{n=0}^N u_{n+1} - u_n = u_{N+1} - u_0 \text{ par télescopage, qui est bien une suite convergente.}$$

Une seule bonne réponse : B.

15)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

Et c'est une question assez difficile à cause de la présence des réponses C et D.

D'abord quelques résultats du cours que nous verrons en fin d'année avec les PCSI : on rappelle que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels **positifs**. Dans ce cas particulier, en notant

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k :$$

- $\sum u_n$ converge si et seulement si elle est majorée (résultat assez simple qui est une conséquence du fait que $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ et que la suite S est donc croissante) ;
- soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$. On a alors $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

En effet, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$ puisque c'est un carré. Ce qui donne la précédente inégalité, appelée inégalité **arithmético-géométrique**.

On a alors :

$$\sum_{n=0}^N \frac{u_n + u_{n+1}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N u_n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N u_{n+1} = \frac{1}{2} S_N + \frac{1}{2} (S_{N+1} - S_0) \text{ qui converge puisque } \sum u_n =$$

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donnée convergente par hypothèse.

Par ailleurs, $\sum_{n=0}^N \sqrt{u_n u_{n+1}} \leq \sum_{n=0}^N \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ à cause de l'inégalité arithmético-géométrique.

Notamment $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ est majorée par la limite de $\sum \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$, donc converge.

Deux bonnes réponses : A et C.

16)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

Question difficile à cause de la présence de la réponse A.

Par hypothèse, $\sum u_n^2$ converge, notamment $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Donc, à partir d'un certain rang, $u_n^3 \leq u_n^2$, ce qui prouve que $\sum u_n^3$ converge (car ce sont des séries à termes positifs). La réponse D est juste, la réponse C fautive.

En prenant $u_n = \frac{1}{n}$, les séries de référence montrent que $\sum u_n^2$ converge mais $\sum u_n$ diverge. La réponse B est donc fautive.

En revanche, en réutilisant l'inégalité arithmético-géométrique, on a :

$$\frac{u_n}{n+1} \leq \frac{u_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2}}{2}$$

Or $\sum u_n^2$ converge et $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge, donc $\sum \frac{u_n}{n+1}$ est majorée par la moyenne de leurs limites, donc converge.

Deux bonnes réponses : A et D.

17) Le plus simple est sans doute d'effectuer la division euclidienne, on obtient $4X + 3$ comme reste et $Q_0 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ comme quotient.

Une seule bonne réponse : A.

18) Les réponses A et B sont clairement fautes d'après la question précédente.

La réponse C est fautive car les polynômes de $\text{Vect}(P) + F$ sont ceux qui peuvent d'écrire $\lambda P + (X^2 + 2)Q = (X^2 + 2)(Q + \lambda Q_0) + \lambda(4X + 3)$

donc le polynôme $X^2 + 3$ (par exemple) n'appartient pas à $\text{Vect}(P) + F$.

La réponse D est juste puisque le seul multiple de $X^2 + 2$ qui soit de degré inférieur à 1 est le polynôme nul, et que tout polynôme peut s'écrire $(X^2 + 2)Q + R$ avec $\deg(R) \leq 1$ (par division euclidienne par $X^2 + 2$).

Une seule bonne réponse : D.

19) En effectuant la division euclidienne de la question 17, on a obtenu que $P = (X^2 + 2)(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) + 4X + 3$.

Donc $R = P - (4X + 3) = (X^2 + 2)(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) = (X^2 + 2)(X - 1)^3$.

Une seule bonne réponse : A.

20) La réponse A est manifestement fautive puisque $\dim E < \dim F$: il n'existe pas de surjection linéaire de E vers F .

La réponse B est fausse, puisque l'application nulle est linéaire et non injective (E de dimension non nulle).

La réponse C est fausse puisque $\dim E \neq \dim F$.

La réponse D est juste en posant par exemple $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in \llbracket 1; \dim E \rrbracket, f(e_i) = b_i$ où $(e_i)_{i \in \llbracket 1; \dim E \rrbracket}$ est une base de E , $(b_i)_{i \in \llbracket 1; \dim F \rrbracket}$ une base de F .

Une seule bonne réponse : D.

- 21) La réponse A (et donc aussi la réponse C) est juste puisque $\operatorname{rg}(f + g) = \dim(\operatorname{Im}(f + g)) \leq \dim(\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g))$ car $\operatorname{Im}(f + g) \subset \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$ puis, d'après la formule de Grassmann, $\dim(\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)) = \dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(g)) - \dim(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g)) \leq \dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(g)) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.
Il y a au plus deux bonnes réponses, donc

Deux bonnes réponses : A et C.

- 22) $1 + j + j^2 = 0$, par exemple parce que ce sont les trois racines du polynôme $X^3 - 1$ (la somme des racines est l'opposé du coefficient du terme en X^2 d'après les relations coefficients-racines).

Une seule bonne réponse : C.

- 23) Un simple calcul montre que

Une seule bonne réponse : C.

- 24) $A^2 = 0_3$ est la matrice nulle. Une manière simple de le voir est d'écrire $A^2 = CC^TCC^T = C(C^TC)C^T = (1 + j^2 + j)A = 0_3$.

Une seule bonne réponse : C.

- 25) En conséquence de la réponse précédente : la matrice A^2 est de rang 0.

Une seule bonne réponse : A.

- 26)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

Le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^3 est donné, pour $u = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (x'; y'; z') \in \mathbb{R}^3$, par $(u|v) = xx' + yy' + zz'$.

La réponse C est donc, de manière assez immédiate, juste.

La réponse B aussi puisque toute famille orthogonale est libre, et que la famille donnée est une famille de 3 vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Deux bonnes réponses : B et C.

- 27) D'après la réponse précédente, $\dim(F) = 2$.
Donc tout supplémentaire de F (orthogonal ou non) est de dimension 1 : la réponse A est fausse, ainsi que la réponse D.
 F possède un unique supplémentaire orthogonal (c'est le cas de tout sous-espace vectoriel

en dimension finie) : réponse B fausse.

L'unique supplémentaire orthogonal de F est $\text{Vect}(e_3)$ d'après la question précédente : réponse C fausse.

Aucune bonne réponse : cocher la case E.

28)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

Soit p la projection sur $\text{Vect}(e_1, e_2)$ parallèlement à e_3 .

On demande la matrice donnant les coordonnées de $p((1; 0; 0))$, $p((0; 1; 0))$ et $p((0; 0; 1))$ dans la base canonique.

Soit $(x; y; z)$ les coordonnées de $u = (1; 0; 0)$ dans la base $(e_1; e_2; e_3)$.

En effectuant le produit scalaire de u par e_1 , puis par e_2 on obtient :

$$30x = 1 \text{ puis } 6y = -1.$$

Or $p(u) = xe_1 + ye_2$ par définition des projections, ce qui conduit à $p(u) = \left(\frac{1}{5}; \frac{-2}{5}; 0\right)$.

Les réponses A, B et C sont donc fausses (la première colonne de la matrice donnée n'est pas égale à $p(u)$ obtenu précédemment), mais éventuellement la réponse D pourrait être juste.

En recommençant le même travail pour $p((0; 0; 1))$ on obtient $p((0; 0; 1)) = (0; 0; 1)$ (et on vérifie qu'effectivement, le troisième vecteur de la base canonique est dans le plan $\text{Vect}(e_1; e_2)$ donc est un point fixe de la projection) ce qui permet d'affirmer que la réponse D est elle aussi fausse... ouf!

Question calculatoire, à laisser tomber le jour de l'épreuve!

Aucune bonne réponse : cocher la case E.

29)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

Par définition, X suit la loi binomiale de paramètres $n, \frac{1}{2}$. Par ailleurs, les expériences étant identiques, X et Y suivent la même loi.

Deux bonnes réponses : C et D.

30)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

La probabilité demandée est égale à

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k; Y = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \frac{1}{4^n} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \text{ (calcul classique que j'ai la flemme d'écrire ici :-).}$$

Aucune bonne réponse : cocher la case E.

31)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

D'après le théorème des probabilités totales, la probabilité demandée vaut

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{k}{n} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

Une seule bonne réponse : A.

32)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

Par définition des probabilités conditionnelles, la probabilité demandée est

$$p = \frac{2n}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)(n+1)} \times \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$\text{Donc } p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Une seule bonne réponse : B.

33)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

$$\vec{\nabla} f(x; y) = (2x - y; -x).$$

Donc, au point (1; 0), il vaut (2; -1).

Une seule bonne réponse : C.

34)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

On peut voir la surface demandée comme l'ensemble des points $M(x; y; f(x; y))$. Le plan tangent à cette surface est dirigé par $\vec{u} = (1; 0; 2x - y)$ et $\vec{v} = (0; 1; -x)$.

Au point (3; 2), des vecteurs directeurs de ce plan sont donc $\vec{u} = (1; 0; 4)$ et $\vec{v} = (0; 1; -3)$.

Un vecteur normal au plan est donc donné par $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-4; 3; 1)$.

Finalement $M(x; y; z)$ appartient au plan tangent si et seulement si $-4(x - 3) + 3(y - 2) + (z - 6) = 0 \Leftrightarrow z = 4x - 3y$

Une seule bonne réponse : D.

35)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

La fonction possède un point critique lorsque le gradient s'annule : ici, il ne s'annule qu'en (0; 0).

Une seule bonne réponse : B.

36)

Nous n'avons pas encore fait le chapitre/paragraphe correspondant en PCSI.

Si la fonction possède un extremum local, c'est un point critique.

Il suffit donc de vérifier si (0; 0) est un extremum local.

Or $f(x; 0) = x^2 + 3$, donc si (0; 0) est un extremum local, c'est un minimum local.

$$\text{Et } f(t/2; t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{2} + 3 = \frac{-t^2}{4} + 3.$$

Donc f ne possède pas d'extremum local (et n'est pas bornée).

Une seule bonne réponse : A.