Exercice corrigé

François Coulombeau
coulombeau@gmail.com
Lycée La Fayette, Clermont-Ferrand (63)

13 avril 2026

Correction de l'exercice 16.11

Ex. 11 (Cor.) Pour tout entier $n \geq 3$, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ par :
« il existe $(u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{N}^{*n}$ tel que $u_1 < u_2 < ... < u_n$ et $1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$. »

1) Analyse du cas $n = 3$: on suppose qu'il existe $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{N}^{*3}$ tel que $u_1 < u_2 < u_3$ et $1 = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}$.
   a) Montrer que $u_1 < 3$. En déduire la valeur de u_1.
   b) Trouver les valeurs de u_2 et u_3.
2) Montrer que $\mathcal{P}(4)$ est vraie et trouver tous les quadruplets qui satisfont cette propriété.
3) Montrer par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 3$.

Cor. 11 :

1) Analyse du cas $n = 3$: on suppose qu'il existe $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{N}^{*3}$ tel que $u_1 < u_2 < u_3$ et $1 = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}$.
   a) $0 < u_1 < u_2 < u_3$ donc $1 = \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} < \dfrac{3}{u_1}$.
   Donc $u_1 < 3$.
   De même, $1 = \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} > \dfrac{1}{u_1}$ donc $u_1 > 1$.
   Finalement, $u_1 = 2$.
   b) On a donc $\dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} = \dfrac{1}{2}$.
   Le même raisonnement qu'à la question précédente conduit à $u_2 < 4$ puis à $u_2 > 2$.
   Donc $u_2 = 3$.
   Et par soustraction, $u_3 = 6$.
2) On recommence l'analyse précédente pour la propriété $\mathcal{P}(4)$:
   - on obtient d'abord $1 < u_1 < 4$ donc $u_1 = 2$ ou $u_1 = 3$.

- dans le cas $u_1 = 2$, on obtient ensuite $2 < u_2 < 6$.
  Le cas $u_2 = 3$ conduit à $\dfrac{1}{u_3} + \dfrac{1}{u_4} = \dfrac{1}{6}$ avec $6 < u_3 < 12$ puis aux quadruplets $(2; 3; 7; 42)$, $(2; 3; 8; 24)$, $(2; 3; 9; 18)$ et $(2; 3; 10; 15)$.
  Le cas $u_2 = 4$ donne $4 < u_3 < 8$ ce qui conduit aux quadruplets $(2; 4; 5; 20)$ et $(2; 4; 6; 12)$.
  Le cas $u_2 = 5$ donne $5 < u_3 < \dfrac{20}{6}$, c'est-à-dire à $u_3 = 6$ et conduit à $u_4 = \dfrac{15}{2}$ ce qui est absurde.

$\mathcal{P}(4)$ est donc vraie, et il y a six quadruplets vérifiant la propriété qui sont
$(2; 3; 7; 42)$, $(2; 3; 8; 24)$, $(2; 3; 9; 18)$, $(2; 3; 10; 15)$, $(2; 4; 5; 20)$ et $(2; 4; 6; 12)$.
Le dernier de ces quadruplets est particulièrement intéressant pour la suite : en effet, il donne la décomposition
$1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$ qui fait intervenir la décomposition obtenue pour $\mathcal{P}(3)$.
C'est la clef pour l'hérédité de la récurrence de la question suivante.

3) Montrons la propriété par récurrence. L'initialisation est déjà faite.
Hérédité : supposons que pour un entier $n \geqslant 3$ la propriété est vraie, et soit $0 < u_1 < u_2 < ... < u_n$ des entiers tels que
$\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + ... + \dfrac{1}{u_n} = 1.$
Alors, nécessairement, comme on l'a vu plus tôt, $u_1 > 1$ et
$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2u_1} + \dfrac{1}{2u_2} + ... + \dfrac{1}{2u_n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$
avec de plus, $2 < 2u_1 < 2u_2 < ... < 2u_n$, ce qui fournit donc un $(n+1)$-uplet satisfaisant $\mathcal{P}(n+1)$.
Conclusion : la propriété est initialisée au rang 3, héréditaire à partir de ce rang, donc pour tout entier $n \geqslant 3$, il existe des entiers $0 < u_1 < u_2 < ... < u_n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} = 1.$