

Fonctions de référence

I. Logarithmes et exponentielle

Ex. 7.1 Soit $n, q \in \mathbb{N}^*$.

- Compléter : n s'écrit avec exactement q chiffres si et seulement si
..... $\leq n <$
- En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $\log_{10}(n)$ pour que n s'écrive avec q chiffres.
- En utilisant le fait que $2^{10} = 1024 \approx 10^3$, donner une valeur approchée de $\log_{10}(2)$.
- Donner le nombre approximatif de chiffres du plus grand nombre premier connu $2^{82589933} - 1$ (record obtenu le 7 décembre 2018 par Patrick Laroche).

[Réponse : ce nombre premier possède 24 862 048 chiffres en base 10.]

Ex. 7.2 (Cor.) Soient $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ dérivables où u vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) > 0$.

Montrer que $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Ex. 7.3

- Montrer que pour tout réel positif x , $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.
- Montrer que $e \geq \frac{8}{3}$.

Indication : voir l'exercice 5 du cours.

Ex. 7.4 On rappelle que, d'après l'exercice 2 du cours,

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Que peut-on dire des limites de la forme $1^{+\infty}$?

Calculer de même $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{-x}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{\frac{1}{\ln(x)}}$.

Interpréter ces résultats en terme de formes indéterminées.

Ex. 7.5 Calculer, si elles existent :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - 4x + 1 - \ln(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x + 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^3 + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln(x))$

Ex. 7.6 Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{\frac{-1}{x^2}}\right)^x$. Quelle conclusion peut-on en tirer sur la valeur que pourrait avoir 0^0 ? Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2^{\frac{-1}{x}}\right)^x$ et préciser votre réponse.

Ex. 7.7 Résoudre les équations d'inconnue x réelle :
 $(E_1) : \log_{10}(x+2) - \log_{10}(x+1) = \log_{10}(x-1)$.
 $(E_2) : x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$.

II. Fonctions trigonométriques et réciproques

Ex. 7.8 Valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$?

Ex. 7.9 Donner la valeur de $\text{Arcsin}\left(\frac{-1}{2}\right)$, $\text{Arccos}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$, $\text{Arctan}(\sqrt{3})$.

Ex. 7.10 (Cor.) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan x = 1$
- $\sin^2(2x) = \cos^2(x)$
- $\cos(12x) - \cos(2x) = \sqrt{3} \sin(5x)$

Ex. 7.11 [*] Résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E) \quad \cos(5x) - 3\cos(3x) + 5\cos(x) = 0$$

Ex. 7.12 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$.

Ex. 7.13 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{6}$ b. $\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) = \pi$

c. $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos} x$ d. $\operatorname{Arcsin}(2x - 1) = \alpha \in \mathbb{R}$

e. $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) - \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right)$

Ex. 7.14 (Cor.) $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$: donner son domaine de définition, son domaine de dérivabilité, puis étudier et tracer la fonction.

Ex. 7.15 Donner une expression de Arcsin et de Arccos ne faisant intervenir que Arctan .

Ex. 7.16 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arctan}(x) + 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{\pi}{2}$$

Que vaut $\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}-1)$? Que vaut $\operatorname{Arctan}(2-\sqrt{3})$?

III. Fonctions hyperboliques

Ex. 7.17 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a. Calculer $\operatorname{ch}(3x)$ en fonction de $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(x)$.

b. Linéariser $\operatorname{sh}^2(x) \operatorname{ch}(x)$ (c'est-à-dire l'exprimer comme combinaison linéaire de fonctions du type $x \mapsto \operatorname{ch}(kx)$ ou $x \mapsto \operatorname{sh}(kx)$ avec $k \in \mathbb{N}$).

c. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{ch}(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx)$.

Ex. 7.18 (Cor.) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(2\alpha) = 2\operatorname{sh}(\alpha) \operatorname{ch}(\alpha)$.

b. On pose $p_n(x) = \prod_{k=0}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Calculer $\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) p_n(x)$ pour $x \neq 0$ et en déduire une expression simplifiée de $p_n(x)$.

c. On pose $p(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x)$.

Déterminer $p(x)$ pour $x \neq 0$.

d. Vérifier que p est continue en 0.

Ex. 7.19

a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} = \frac{1}{\operatorname{sh}(x/2)} - \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

Simplifier $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\operatorname{sh}(2^k x)}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

IV. Divers, études de fonctions

Ex. 7.20

a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.

b. En déduire l'existence et la valeur de $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$.

Ex. 7.21 Montrer que $\forall t \in]1; +\infty[, \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < e < \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t$.

Ex. 7.22 Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b$.

Corrections

Cor. 7.2 : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln(u(x))} = f(x)$ est bien définie car $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) > 0$.

Par ailleurs, c'est une fonction dérivable comme composée et produit de fonctions qui le sont et :

$$f'(x) = \left[v'(x) \ln(u(x)) + v(x) \times \frac{u'(x)}{u(x)} \right] e^{v(x) \ln(u(x))} \text{ d'où } \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f'(x) = v'(x) \ln(u(x)) u(x)^{v(x)} + v(x) u'(x) u(x)^{v(x)-1}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Cor. 7.10 : a. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, résultat donné par la propriété 7.14 du cours.

$$\text{b. } \tan x = 1 \Leftrightarrow x \in S_0 = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ car } \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\left| \begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \text{ou} \\ \sin^2 x = \frac{1}{4} \end{array} \right| \Leftrightarrow \cos^2 x = \cos^2 x \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos x = 0$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right| \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

- $\frac{1+x}{1-x}$ est défini d'une part ;
- et $-1 \leq \frac{1+x}{1-x} \leq 1$ d'autre part.

Étudions donc $g : x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$.

g est définie (et dérivable) sur $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et sur cet ensemble

$$g(x) = \frac{1+x}{1-x} = \frac{2+x-1}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1.$$

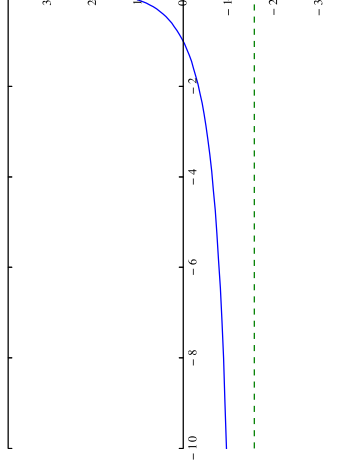
$$\text{Donc } -1 \leq g(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{1-x} \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq 1-x \\ 1-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 0.$$

f est donc définie sur $\mathbb{R}_-$ et dérivable sur $\mathbb{R}_*$ (l'étude précédente restant valable en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes).

On a alors $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-1-\frac{4}{1-x}+\frac{4}{1-x}}} = \frac{1}{(1-x)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{1-x}+\frac{4}{1-x}}}$. Après simplification, on obtient donc en tenant compte du fait que $x < 0$ et que par conséquent $1-x > 1 > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{-x}}. \quad f \text{ est donc strictement croissante sur } \mathbb{R}_-. \text{ Enfin,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-\pi}{2} \text{ (asymptote horizontale d'équation } y = \frac{-\pi}{2} \text{) et } f(0) = \frac{\pi}{2}.$$



Cor. 7.18 :

$$\text{a. } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \text{sh}(2\alpha) = \frac{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}}{2} = \frac{(e^\alpha - e^{-\alpha})(e^\alpha + e^{-\alpha})}{2} = 2 \text{sh}(\alpha) \text{ch}(\alpha).$$

$$\text{b. Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } n \geq 1$$

$$p_n(x) \text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = \prod_{k=0}^n \text{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right) \text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2} \prod_{k=0}^{n-1} \text{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right) \text{sh}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) =$$

$$\frac{p_{n-1}(x) \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2}.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $q_n(x) = p_n(x) \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Or son premier terme vaut $q_0(x) = \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x)$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, p_n(x) = \frac{\operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x)}{2^n \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

c. On écrit pour $x \neq 0$:

$$2^n \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = x \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \operatorname{sh}'(0) = x \operatorname{ch}(0) = x.$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}^*, p(x) = \frac{\operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x)}{x}.$$

De plus, pour $x = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n(0) = 1 = p(0)$.

d. Il s'agit de montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} p(x) = p(0)$.

$$\text{Or } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = \operatorname{ch}(0) = 1 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \operatorname{ch}(x) = \operatorname{ch}(0) = 1 \text{ donc}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} p(x) = 1 = p(0). \text{ } p \text{ est bien continue.}$$