

Dérivabilité

I. Dérivabilité

Ex. 17.1 (Cor.) Déterminer $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\sqrt{x} - e^{\frac{1}{2}}}{\ln x - 1}$.

Ex. 17.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la classe de la fonction f définie par

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x \in [-1; 1] & \mapsto (1 - x^2)^n \\ x \notin [-1; 1] & \mapsto 0 \end{cases}$$

Ex. 17.3 (Cor.) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : x \mapsto (x - a)^n(x - b)^n$.

- Calculer $f^{(n)}(x)$.

- En déduire l'expression de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Ex. 17.4 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x > 0 & \mapsto e^{\frac{-1}{x^2}} \\ x \leq 0 & \mapsto 0 \end{cases}$

- Montrer que f est continue, puis qu'elle est dérivable, sur \mathbb{R} .
- Montrer que f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$$

- En déduire que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Ex. 17.5 On souhaite montrer que Arcsin est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] - 1; 1[$ sans utiliser le théorème (16.25) donnant la classe d'une bijection réciproque.

- Rappeler l'ensemble de définition, l'ensemble de continuité, l'ensemble de dérivabilité et l'expression de la dérivée de Arcsin.
- Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in] - 1; 1[, \text{Arcsin}^{(n)}(x) = \frac{Q_n(x)}{(1 - x^2)^{n - \frac{1}{2}}}$$

- En déduire que Arcsin est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] - 1; 1[$.
- Bonus** : montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(Q_n) = n - 1$, que tous les coefficients de Q_n sont positifs ou nuls et que Q_n possède au plus une racine réelle.

II. Éléments de calcul différentiel

Ex. 17.6 Trouver les extrema des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$ sur $[3; +\infty[$
- $h : x \mapsto (x^2 - 3x) e^x$ sur $[1; 2]$
- $g : x \mapsto (x^2 - 3x) e^x$ sur \mathbb{R}
- $k : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{(3+x)^2}\right)$ sur \mathcal{D}_k

Ex. 17.7 Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} et 1-périodique qui admet n zéros sur $[0; 1[$.

Montrer que f' admet au moins n zéros sur $[0; 1[$.

Ex. 17.8 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que f définie par $f(x) = x^n + ax + b$ admet au plus 3 racines réelles distinctes.

Ex. 17.9 *Théorème de Rolle généralisé*

Soit f dérivable sur \mathbb{R} telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Montrer que f' s'annule au moins une fois sur \mathbb{R} .

Ex. 17.10

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ et dérivables sur $]a; b[$ telles que g' ne s'annule pas sur $]a; b[$.

Montrer que $g(a) \neq g(b)$ et qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

2. Application : soient f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$, dérivables sur $]a; b[$ telles que g' ne s'annule pas sur $]a; b[$ et $\forall x \in]a; b[, |f'(x)| \leq g'(x)$.

Montrer que $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

Ex. 17.11 Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ 0 & \mapsto 0 \end{cases}$.

1. Montrer que g est continue et dérivable sur \mathbb{R} et que $g'(0) = 1$.
2. Montrer qu'il n'existe aucun voisinage de 0 sur lequel g est croissante.

III. Divers

Ex. 17.12 (Cor.) Méthode de Newton

On considère une fonction f définie sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 et dont la dérivée ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

1. Montrer que f' est à signe constant et que f est bijective de \mathbb{R} sur $\text{Im } f$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, la tangente à \mathcal{C}_f en x coupe l'axe des abscisses en un point dont on précisera l'abscisse $X(x)$.
3. On pose $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = X(u_n)$. On suppose de plus que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et que f'' est à signe constant.

Montrer que la suite u est bien définie et est monotone à partir du second terme.

4. En déduire les comportements asymptotiques possibles de la suite u . Préciser sa limite.

Ex. 17.13 Règle de l'Hospital Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ s'annulant en $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que si $g'(a) \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Ex. 17.14 []** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ s'annulant en 0.

Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Ex. 17.15 [*] Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

On suppose que $f(a) = 0$ et $f(b)f'(b) < 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Ex. 17.16 [*] On note $f_n(x) = \frac{d^n \text{Arctan } x}{dx^n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, $f_{n+2}(x)(1+x^2) + 2(n+1)x f_{n+1}(x) + n(n+1)f_n(x) = 0$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(x) = f_n(x)(1+x^2)^n$ est un polynôme et donner une relation de récurrence vérifiée par ces polynômes.
3. Calculer P_1, P_2, P_3 et P_4 .
4. Montrer que pour $n > 1$, P_n admet $n - 1$ racines distinctes.

IV. Suites récurrentes et convexité

Ex. 17.17 Soit u la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$. Étudier la suite u et montrer qu'elle converge.

Indication : on pourra d'abord traiter le cas où $u_0 \leq \frac{1}{2}$, puis conclure dans le cas général...

Ex. 17.18 Soit v la suite définie par $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{v_n + 2}{2v_n + 1}$.

Montrer que la suite est bien définie puis étudier sa convergence.

Indication : on pourra, par exemple mais cela n'a rien d'obligatoire, introduire la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1 - v_n}{1 + v_n}$.

Ex. 17.19 [*] Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et x et y les suites définies par $x_0 = a, y_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \end{cases}$$

1. Montrer que $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.
2. Montrer que x est décroissante à partir du rang 1, et y croissante à partir du rang 1.
3. Montrer que ces suites convergent vers une même limite.

Remarque : la limite commune de ces deux suites est appelée **moyenne arithmético-géométrique de a et b** . Il n'y a pas d'expression simple connue en fonction de a et b de cette moyenne.

Ex. 17.20 [*] Mieux vaut avoir déjà fait l'exercice 17.19... **Attention**, la définition des deux suites est différente suivant l'exercice!

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et x et y les suites définies par $x_0 = a, y_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_n} \end{cases}$$

Montrer que ces suites convergent vers une même limite.

Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = b \cos(\theta)$.

Donner la limite commune des suites x et y en fonction de b et θ .

Ex. 17.21 [*] **Centrale MP 2000**

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ et u la suite définie par $u_0 \neq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f est définie sur \mathbb{R}^* et se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
2. Montrer que u converge et donner sa limite.
3. Montrer que $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}$.

Ex. 17.22 [*] **Inégalité de Hölder**

1. Montrer que la fonction \exp est convexe.
2. En déduire que $\forall p \in]1; +\infty[, \forall u \in \mathbb{R}_+^*, \forall v \in \mathbb{R}_+^*$, en notant $q = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}$, on a :

$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} u + \frac{1}{q} v$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ une famille de n réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^n a_i^p = 1$.

Soit $(b_1; b_2; \dots; b_n)$ une famille de n réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^n b_i^q = 1$.

Montrer que

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 1$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ et $(b_1; b_2; \dots; b_n)$ deux familles de n réels strictement positifs. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

5. L'inégalité de la question précédente reste-t-elle valable pour des familles de réels positifs ou nuls ?

Corrections

Cor. 17.1 : À l'aide de DL : $x = e(1+h)$ où $h \xrightarrow{x \rightarrow e} 0$.

$$\sqrt{x} - e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e(1+h)} - \sqrt{e} = \sqrt{e}(h/2 + o(h)).$$

$$\ln x - 1 = \ln(e) + \ln(1+h) - 1 = h + o(h).$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow e} \frac{\sqrt{x} - e^{\frac{1}{2}}}{\ln x - 1} = \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

Cor. 17.3 :

1. On pose $g(x) = (x-a)^n$ et $h(x) = (x-b)^n$.

$$g^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)(x-a)^{n-k} = \frac{n!(x-a)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

En utilisant la formule de Leibniz, on obtient :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n!)^2}{k!(n-k)!} (x-a)^{n-k} (x-b)^k.$$

2. En prenant $a = b$, on obtient ainsi deux expressions de $f^{(n)}$:

$$f^{(n)}(x) = \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n!)^2}{k!(n-k)!} \right] (x-a)^n \text{ et}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!} (x-a)^n. \text{ Donc}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Cor. 17.12 :

1. f est de classe \mathcal{C}^1 donc f' est continue. Or f' ne s'annule pas, donc f' est de signe constant.

f est donc strictement monotone et injective.

Donc f est une bijection de \mathbb{R} sur $\text{Im } f$.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. La tangente à \mathcal{C}_f en x_0 a pour équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Comme f' ne s'annule pas, la tangente coupe l'axe des abscisses au point (d'ordonnée 0...) d'abscisse :

$$X(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

3. La fonction $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ est définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} .

Donc la suite u définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$ est bien définie (\mathbb{R} est un intervalle stable par F).

On suppose de plus que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et que f'' est à signe constant.

Supposons, par exemple, $f'' \geq 0$ et $f' > 0$ (les autres cas se traitent de même).

Notamment, f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

- Si $f(u_0) = f(0) < 0$, alors $u_1 = u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)} = \frac{-f(0)}{f'(0)} > 0$.

De plus, f' est croissante (car $f'' \geq 0$). Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$f(u_1) - f(u_0) \geq (u_1 - u_0)f'(u_0)$$

$$\text{On en déduit que } f(u_1) \geq f(0) + \frac{-f(0)}{f'(0)} \times f'(u_0) = 0.$$

Notamment, f étant continue et strictement croissante, $\exists ! l \in \mathbb{R}$, $f(l) = 0$.

Enfin, on vérifie que $I = [l; +\infty[$ est stable par F puisque $F(l) = l$ et

$$F'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)} > 0 \text{ pour } x \in]l; +\infty[.$$

Donc à partir du rang 1, $u_n \geq l$ et u est monotone.

Enfin, $u_2 = u_1 - \frac{f(u_1)}{f'(u_1)} \leq u_1$, donc u est décroissante à partir du rang 1.

- Si $f(u_0) \geq 0$, on étudie deux cas : 1er cas $f > 0$ ne s'annule jamais, 2ème cas f s'annule en $l \in \mathbb{R}$ unique.

Le deuxième cas est similaire à ce que nous venons de faire, le premier cas est encore plus simple puisqu'on obtient directement pour tout réel x , $F \leq x$.

4. La suite u est monotone à partir du rang d'après la question précédente. Donc, elle est soit bornée et convergente, soit non bornée et divergente vers $\pm\infty$.

Plus précisément, dans le cas convergent, F étant continue, u converge vers une solution de $F(x) = 0$, c'est-à-dire vers l'unique solution de $f(x) = 0$.