Correction DM n°6

Exercice 1.

Partie A - Chemins sur un carré

1) Chemins à trois pas :
Comme une liste de sommets adjacents :
$\{ABAB; ABAD; ABCD; ADCD; ABCB; ADCD; ADAB; ADAD\}$
Comme un mot donnant les pas Horizontaux ou Verticaux :
$\{HHH; HHV; HVH; VHH; HVV; VHV; VVH; VVV\}$

2) Il y a autant de chemins à n pas que de mots à n lettres choisies dans l'alphabet $\{H; V\}$: il y en a donc 2^n.

3) Pour qu'un chemin se termine sur A, il faut et il suffit qu'il y ait un nombre pair de pas verticaux et de pas horizontaux.
Si n est impair, il y a donc 0 chemin de n pas se terminant sur A.
Et si n est pair, il y a autant de chemins à n pas se terminant sur A que de mots à n lettres choisies dans l'alphabet $\{H; V\}$ avec un nombre pair H : il y en a donc $S_n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2k}$ (ou bien il y a 0 lettre H, ou bien il y a 2 lettres H, ou bien etc...).
Notons $T_n = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2k-1}$.
On a $S_n + T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $S_n - T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = 0$.
Donc $S_n = T_n = 2^{n-1}$.
Finalement il y a 2^{n-1} chemins à n pas se terminant sur A dans le cas où n est pair.

Partie B - Chemin sur un triangle

1) Chemins à deux pas notés comme mots donnant les pas dans le sens Trigonométrique et dans le sens Horaire :
$\{TT; TH; HT; HH\}$

2) Chemins à trois pas notés comme mots donnant les pas dans le sens Trigonométrique et dans le sens Horaire :
$\{TTT; TTH; THT; HTT; THH; HTH; HHT; HHH\}$

3) Il y a autant de chemins à n pas sur le triangle que de mots de n lettres choisies dans l'alphabet $\{T; H\}$: il y en a donc 2^n.

4) Chemins à deux pas se terminant sur M notés comme mots donnant les pas dans le sens Trigonométrique et dans le sens Horaire :
$\{TH; HT\}$

5) Chemins à trois pas se terminant sur M notés comme mots donnant les pas dans le sens Trigonométrique et dans le sens Horaire :

$\{TTT; HHH\}$

Chemins à quatre pas se terminant sur M notés comme mots donnant les pas dans le sens Trigonométrique et dans le sens Horaire :

$\{TTHH; THTH; HTTH; THHT; HTHT; HHTT\}$

Chemins à cinq pas se terminant sur M notés comme mots donnant les pas dans le sens Trigonométrique et dans le sens Horaire :

$\{HHHHT; HHHTH; HHTHH; HTHHH; THHHH;$
$TTTTH; TTTHT; TTHTT; THTTT; HTTTT\}$

6) On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = J - I$ la ***matrice d'adjacence*** du triangle MNP considéré comme un graphe à trois sommets.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} K^n = (J-I)^n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^{n-k} J^k \qquad \text{car } I \text{ et } J \text{ commutent} \\ &= (-1)^n \left(I + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^k 3^{k-1} J \right) \qquad \text{car } \forall k \in \mathbb{N}^*, J^k = 3^{k-1} J \end{aligned}.$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^k 3^{k-1} = \frac{-1}{3} + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-3)^k = \frac{-1 + (1-3)^n}{3} = \frac{(-1)^n 2^n - 1}{3}$.

Donc $K^n = (-1)^n I + \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} J$.

b) Montrons d'abord par récurrence que le coefficient $m_{1,j}$ de K^n donne le nombre de chemins à n pas se terminant sur M si $j = 1$, sur N si $j = 2$ et sur P si $j = 3$.

Initialisation : pour $n = 0$, il y a un chemin à 0 pas se terminant sur M et aucun sur terminant sur N et P.

Or $K^0 = I$, la propriété est donc initialisée.

Hérédité : supposons que, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, la propriété est vraie.

Alors, en notant $M_{1,j}, j \in [\![1; 3]\!]$ les coefficients de la première colonne de K^{n+1} et $m_{1,j}, j \in [\![1; 3]\!]$ ceux de K^n, on a, puisque $K^{n+1} = K \times K^n$:

$M_{1,1} = 0 \times m_{1,1} + 1 \times m_{1,2} + 1 \times m_{1,3} = m_{1,2} + m_{1,3}$.

Or un chemin à $n+1$ pas se termine sur M si et seulement si on se trouvait au pas précédent sur P et que le dernier pas s'est effectué dans le sens Trigonométrique, ou bien qu'on se trouvait sur N et que le dernier pas s'est effectué dans le sens Horaire.

Donc $M_{1,1}$ est bien égal à $m_{1,2}$ (nombre de chemins à n pas se terminant sur N) ajouté à $m_{1,3}$ (nombre de chemins à n pas se terminant sur P), par hypothèse de récurrence.

On démontre de même que $M_{1,2} = m_{1,1} + m_{1,3}$ et que $M_{1,3} = m_{1,1} + m_{1,2}$ ce qui achève l'hérédité.

Conclusion : pour tout entier n, le coefficient en première, première colonne de K^n donne le nombre de chemins à n pas se terminant sur M.

Donc le nombre de chemins à n pas se terminant sur M vaut

$$\frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} + (-1)^n = \frac{2^n + (-1)^n(3-1)}{3} = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$$

Exercice 2.

1) F est clairement inclus dans E, et la matrice nulle est magique puisque la somme des coefficients de ses lignes, de ses colonnes et de ses diagonales sont nulles.
Soit $A \in F, B \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$.
La somme des coefficients de la première ligne de $\lambda A + \mu B$ est égale à
$\lambda a_{1,1} + \mu b_{1,1} + \lambda a_{1,2} + \mu b_{1,2} + \lambda a_{1,3} + \mu b_{1,3} = \lambda\left(a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3}\right) + \mu\left(b_{1,1} + b_{1,2} + b_{1,3}\right)$.
De même, pour la deuxième ligne, on obtient : $\lambda\left(a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3}\right) + \mu\left(b_{2,1} + b_{2,2} + b_{2,3}\right)$.
A et B étant des carrés magiques, ces deux sommes sont égales. Et on montre de même que la somme des coefficients des lignes, colonnes et diagonales de $\lambda A + \mu B$ sont égales, donc que $\lambda A + \mu B \in F$.
Donc F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Soit $\phi : (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x + y + z \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} \phi\big(\lambda(x;y;z) + \mu(a;b;c)\big) &= \phi\big(\lambda x + \mu a; \lambda y + \mu b; \lambda z + \mu c\big) \\ &= \lambda x + \mu a + \lambda y + \mu b + \lambda z + \mu c \\ &= \lambda(x+y+z) + \mu(a+b+c) \\ &= \lambda\phi(x;y;z) + \mu\phi(a;b;c) \end{aligned}$$
Donc ϕ est linéaire.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, x = \phi(x; 0; 0)$ donc $\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{rg}(\phi) = 1$.
Donc d'après la formule du rang $\dim\left(\mathrm{Ker}(\phi)\right) = 3 - 1 = 2$.

3) Soit $C \in F$ un carré magique.
J est un carré magique et F est un espace vectoriel, donc $\forall c \in \mathbb{R}, C - cJ$ est un carré magique.
Il suffit donc de montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que la somme des coefficients de la première ligne de $C - cJ$ soit nulle.
Or cette somme vaut $c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3} - 3c$: il suffit donc de poser $c = \dfrac{c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3}}{3}$, ce qui garantit l'existence du réel c recherché.

4) F_0 est clairement inclus dans F (puisque F_0 contient les matrices de F dont les sommes des coefficients par ligne, par colonne et par diagonale sont nulles).
La matrice nulle est aussi clairement dans F_0.
Enfin, en reprenant les résultats de la question 1), avec $A \in F_0, B \in F_0$, $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$, la somme des coefficients de la première ligne de $\lambda A + \mu B$ vaut
$\lambda\left(a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3}\right) + \mu\left(b_{1,1} + b_{1,2} + b_{1,3}\right) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$ puisque $A \in F_0$ et $B \in F_0$.
Ceci est tout aussi valable pour les autres lignes, les colonnes et les diagonales de cette matrice, donc $\lambda A + \mu B \in F_0$.
Donc F_0 est un sous-espace vectoriel de F.

5) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in E$.

$$M \in \operatorname{Ker}(\psi) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ d+e+f &= 0 \\ g+h+i &= 0 \\ a+d+g &= 0 \\ b+e+h &= 0 \\ c+f+i &= 0 \\ a+e+i &= 0 \\ c+e+g &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b+e+h &= 0 \\ d+e+f &= 0 \\ g+h+i &= 0 \\ -b-c+d+g &= 0 \\ c+f+i &= 0 \\ -b-c+e+i &= 0 \\ c+e+g &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b+e+h &= 0 \\ c+e+g &= 0 \\ d+e+f &= 0 \\ g+h+i &= 0 \\ -c+d+e+g+h &= 0 \\ c+f+i &= 0 \\ -c+2e+h+i &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b+e+h &= 0 \\ c+e+g &= 0 \\ d+e+f &= 0 \\ g+h+i &= 0 \\ d+2e+2g+h &= 0 \\ -e+f-g+i &= 0 \\ 3e+g+h+i &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b+e+h &= 0 \\ c+e+g &= 0 \\ d+e+f &= 0 \\ g+h+i &= 0 \\ e-f+2g+h &= 0 \\ -e+f-g+i &= 0 \\ 3e+g+h+i &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b+e+h &= 0 \\ c+e+g &= 0 \\ d+e+f &= 0 \\ e-f+2g+h &= 0 \\ g+h+i &= 0 \\ g+h+i &= 0 \\ e &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a &= g+h \\ b &= -h \\ c &= -g \\ d &= -2g-h \\ f &= 2g+h \\ i &= -g-h \\ e &= 0 \end{cases}$$

Donc $M \in \operatorname{Ker}(\psi) = F_0 \Leftrightarrow M = g\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Notamment $\dim(F_0) = 2$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de F_0.

6) D'après les questions 3) et 5), les carrés magiques sont de la forme

$$C = \begin{pmatrix} a+b+c & -b+c & -a+c \\ -2a-b+c & c & 2a+b+c \\ a+c & b+c & -a-b+c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

Si l'on impose de plus que :

- les coefficients sont entiers, on doit prendre $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$;

- les coefficients sont deux à deux distincts, on doit prendre

$$a \neq 0 \ \text{ et } \ b \notin \left\{-3a; -2a; \frac{-3a}{2}; -a; \frac{-a}{2}; 0; a\right\}$$

Par exemple, pour $a = 3, b = -4, c = 4$, on obtient

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

exemple donné en début d'énoncé.
Enfin, pour gagner en symétrie, on peut faire le changement de variable $u = a + b$, $v = a$ qui donne la forme

$$C = \begin{pmatrix} u+c & -u+v+c & -v+c \\ -u-v+c & c & u+v+c \\ v+c & u-v+c & -u+c \end{pmatrix}, c \in \mathbb{Z}, v \in \mathbb{Z}^*, u \in \mathbb{Z}/\left\{-2v; -v; \frac{-v}{2}; 0; \frac{v}{2}; v; 2v\right\}$$

ce qui fournit

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

comme base de F.