

Correction DM n°7

Exercice 1.

- 1) Sous forme de familles, les marches aléatoires à 2 pas sur ce graphe sont : MMM , MMN , MNM et MNN .
- 2) Sous forme de mots, les marches aléatoires à 2 pas sur ce graphe sont : RR , RC , CC et CR (données dans le même ordre qu'à la question précédente).
- 3) Il y a autant de marches aléatoires à 3 pas sur ce graphe que de mots de 3 lettres prises dans l'alphabet $\{R; C\}$. En effet, à chaque pas, on a le choix ou bien de **R**ester sur le même sommet, ou bien de **C**hanger de sommet.

Pour la première lettre, il y a donc 2 choix possibles, **puis**, pour la seconde, 2 choix possibles, **puis**, pour la troisième, 2 choix possibles.

En tout, il y a donc $2^3 = 8$ marches aléatoires à 3 pas sur ce graphe.

- 4) Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - a) De la même manière qu'à la question précédente, il y a autant de marches aléatoires à n pas sur ce graphe que de mots de n lettres prises dans l'alphabet $\{R; C\}$.
Il y a donc 2^n marches aléatoires à n pas sur ce graphe.
 - b) Pour qu'une marche aléatoire à n pas se termine sur le sommet M , il faut et il suffit qu'on ait changé de sommets un nombre pair de fois.

Il y a donc autant de marches aléatoires à n pas se terminant sur le sommet M que de mots de n lettres prises dans l'alphabet $\{R; C\}$ et contenant un nombre pair de lettres C .

Or :

- **ou bien**, il y a 0 lettre C et un seul mot possible composé de n lettres R ;
- **ou bien**, il y a 2 lettres C et choisir un mot, c'est choisir la position de ces deux lettres parmi les n positions possibles : $\binom{n}{2}$ mots possibles ;
- ...
- **ou bien**, il y a $2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ lettres C et choisir un mot, c'est choisir la position de ces lettres parmi les n positions possibles : $\binom{n}{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ mots possibles.

En tout il y a donc $S_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k}$.

On peut par ailleurs simplifier ce résultat en notant $T_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k}$ et en remarquant que

$$S_n + T_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\text{et que } S_n - T_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = 0.$$

Donc $S_n = T_n = 2^{n-1}$.

Remarque : une méthode *beaucoup plus simple pour cette question* est de dire qu'il y a autant de marches aléatoires à n pas sur ce graphe que de familles de $n+1$ lettres *prises dans les sommets* $\{M; N\}$ *commençant par M et se terminant par M*. On obtient directement le dénombrement 2^{n-1} marches aléatoires sur ce graphe.

5) Avec le nouveau graphe, la situation est plus compliquée : on ne peut plus rester en place lorsqu'on se trouve sur le sommet N . En représentant les marches aléatoires par des mots de n lettres, ceci oblige donc à grouper les lettres C par deux : si on change de sommet pour passer de M à N , le prochain pas fait obligatoirement revenir au sommet M . Ceci n'est pas valable pour la dernière lettre du mot (puisqu'il n'y a pas de pas après).

- Pour les marches à 3 pas, on a donc les marches : RRR, RRC, RCC, CCR ou CCC .
Il y a donc 5 marches à 3 pas sur ce nouveau graphe.

- Pour les marches à $n \in \mathbb{N}^*$ pas, notons a_n le nombre de marches à n pas se terminant sur le sommet M et b_n le nombre de marches à n pas se terminant sur le sommet N .
Si la marche se termine sur N , alors au pas précédent, on se trouvait sur M : donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_{n+1} = a_n$.

Si la marche se termine sur M , alors

ou bien on vient de changer de sommet, et dans ce cas deux pas auparavant on se trouvait déjà en M : le mot représentant une telle marche se termine pas CC ;

ou bien on vient de rester sur le même sommet et au pas précédent, on se trouvait déjà sur M .

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Par ailleurs, $a_1 = 1, b_1 = 1$ et $a_2 = 2$.

La suite a est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$.

On a donc $\exists(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \lambda \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$.

Les conditions initiales permettent de calculer λ et μ et donnent

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \\ b_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \end{cases}$$

Enfin, le nombre de marches aléatoires à n pas sur ce graphe est donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n + b_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right)$$

puisque $a_n + b_n = a_n + a_{n-1} = a_{n+1}$.

Exercice 2.

PARTIE A

$$1) A^2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

2) $A^3 = I_3 = A \times A^2$ donc A est inversible et

$$A^{-1} = A^2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PARTIE B

1) Montrons que la famille $\mathcal{F} = (f; g; \exp)$ est libre.

Soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $af + bg + c \exp = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}$.

En particulier, l'égalité est vraie en évaluant en 0, en $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ et en $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

On a donc, en notant $\alpha = e^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \neq 0$:

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ -\alpha^{-2}a + \alpha^4c = 0 \\ \alpha^{-1}b + \alpha^2c = 0 \end{cases}$$

Les deux premières équations conduisent à $a = c = 0$, la troisième à $b = 0$.

La famille est donc libre.

2) E est engendré par une famille libre de 3 vecteurs, donc $\dim(E) = 3$.

3) E est l'espace vectoriel formé des combinaisons linéaires des fonctions f , g et \exp qui sont toutes les trois \mathcal{C}^∞ .

Donc Δ est bien définie sur E .

De plus, soit $u = af + bg + c \exp$ une fonction quelconque de E (avec $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$). Alors

$$\begin{aligned} \Delta(u)(x) &= af'(x) + bg'(x) + c \exp'(x) \\ \forall x \in \mathbb{R}, &= \frac{-1}{2}af(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}ag(x) - \frac{1}{2}bg(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}bf(x) + c \exp(x) \\ &= \left(\frac{-a}{2} + \frac{\sqrt{3}b}{2}\right)f(x) + \left(\frac{-\sqrt{3}a}{2} + \frac{-b}{2}\right)g(x) + c \exp(x) \end{aligned}$$

Donc $\Delta(u)$ appartient à E .

4) L'expression de $\Delta(u)$ obtenue à la question précédente permet d'affirmer que, si $u = af + bg + c \exp$ est une fonction quelconque de E de coordonnées $M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{F} ,

$$\text{alors } \Delta(u) \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} \frac{-a}{2} + \frac{\sqrt{3}b}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}a}{2} + \frac{-b}{2} \\ c \end{pmatrix} = AM \text{ dans la même base.}$$

Donc les coordonnées de $\Delta \circ \Delta \circ \Delta(u)$ dans la base \mathcal{F} sont $A^3M = I_3M = M$.

Donc

$$\forall u \in E, \Delta \circ \Delta \circ \Delta(u) = u$$

5) La matrice A est inversible, donc Δ est bijective.

En effet, soit $v \in E : v = af + bg + c \exp$ a pour coordonnées $M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{F} .

On cherche une fonction $u \in E$ telle que $\Delta(u) = v$, c'est-à-dire dont les coordonnées sont données dans un vecteur colonne U vérifiant $AU = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. La matrice A étant inversible,

on a donc

$$U = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Comme par ailleurs, d'après la question 3), Δ est un endomorphisme de E , Δ est un automorphisme de E .

6) D'après la question précédente et la question A-2), une telle fonction est donnée par $F = \frac{-1}{2}f + \frac{\sqrt{3}}{2}g$.

Donc l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions du type

$$F : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{-1}{2}f(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}g(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

De même, l'ensemble des primitives de g est l'ensemble des fonctions du type

$$G : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{-\sqrt{3}}{2}f(x) - \frac{1}{2}g(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$