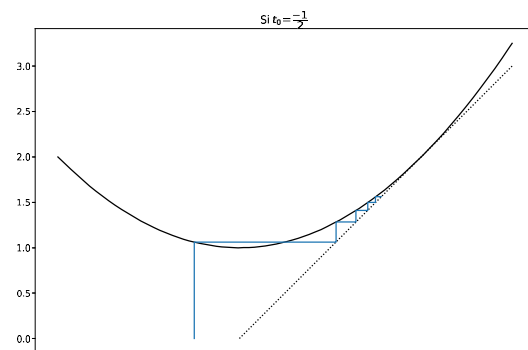
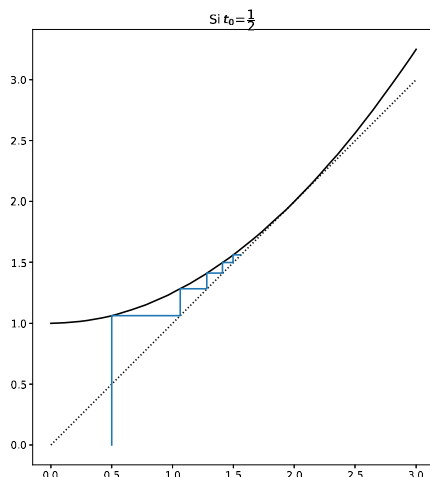
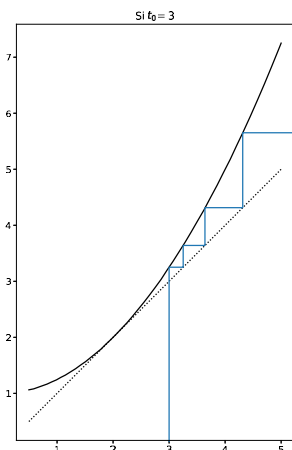


Cor. 3.3 :

1. $h : x \mapsto \frac{x^2}{4} + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$. Donc $\mathbb{R}$ est un intervalle stable. Donc la suite t est bien définie.
2. h est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, croissante sur $\mathbb{R}_+$ (par affinité et translation d'une fonction de référence). On donne ci-dessous 3 représentations graphiques de h , la première bissectrices et les premiers termes de la suite t pour différentes valeurs de t_0 .



3. $h(x) = x \Leftrightarrow x^2 + 4 = 4x \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
4. On a déjà vu que h est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc h passe par un minimum 1 en $x = 0$. Comme h est continue, $h(\mathbb{R}) = [1; +\infty[$. Notamment, $\mathbb{R}_+$ est un intervalle stable par h .
Si $t_0 \leq 0$ alors $t_1 \geq 0$ et, d'après la remarque précédente, tous les termes de la suites sont alors positifs. On peut donc considérer que la suite est à termes positifs quitte à commencer au rang 1. Supposons donc $t_0 \geq 0$. Comme h est croissante sur $\mathbb{R}_+$, la suite t est monotone.
Or, d'après la question précédente, $h(x) - x = \frac{(x-2)^2}{4} \geq 0$. Donc la suite t est croissante.
Si de plus elle est majorée, alors elle est convergente.
Si au contraire elle n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
5. On suppose $t_0 \in [0; 2]$.
 h est croissante sur $[0; 2]$, et $h(0) = 1$, $h(2) = 2$. Donc $[0; 2]$ est un intervalle stable. Donc la suite t est croissante et majorée par 2, elle est donc convergente. Comme de plus h est continue et possède un unique point fixe 2, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 2$$

6. Supposons $t_0 > 2$. La suite t est croissante d'après la question 4. Montrons *par l'absurde* qu'elle n'est pas majorée : supposons qu'elle est majorée. Alors elle serait convergente, et comme h est continue, convergerait vers un point fixe de h . Or h possède un unique point fixe 2. On aurait donc
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 2$ d'une part et
 $\forall n \in \mathbb{N}, t_n \geq t_0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n \geq t_0 > 2$ d'autre part, ce qui est absurde. Donc t n'est pas majorée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$. Enfin, par parité de h , si $t_0 < 0$, $t_1 > 0$ et on se ramène à l'un des deux cas précédents suivant que $t_1 \in [0; 2]$ ou $t_1 \in]2; +\infty[$.

Cor. 3.4 : Soit $f : x \in [0; 1] \mapsto 1 - x^2$.

f est définie, continue et dérivable sur $[0; 1]$ et

$f'(x) = -2x$ donc f est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

Or $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$ donc $f([0; 1]) = [0; 1]$.

De plus, $s_0 = \frac{1}{2} \in [0; 1]$, donc la suite s est bien définie d'une part, et $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \in [0; 1]$ d'autre part.

La suite s est donc bornée.

f étant strictement décroissante on étudie les sous-suites extraites de rang pair et impair et pour cela, on étudie $h = f \circ f$.

$$\forall x \in [0; 1], h(x) = 1 - (1 - x^2)^2 = 2x^2 - x^4.$$

$h'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) = 4xf(x) \geq 0$ puisque $x \in [0; 1]$ est positif et $f(x) \in [0; 1]$ aussi.

Donc $h = f \circ f$ est croissante, donc les suites $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones.

$$s_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$s_2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} < \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

$$s_3 = 1 - \frac{49}{256} = \frac{207}{256} > \frac{192}{256} = \frac{3}{4}.$$

Finalement, $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante et $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Ces deux suites étant bornées, elles convergent vers un point fixe de h (car h est continue).

Cherchons les points fixes de h :

$$h(x) = x \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 2x + 1) = 0 \text{ avec } 1 \text{ pour racine évidente du second facteur.}$$

$$\text{Donc } h(x) = x \Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x-1) = 0.$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5 \text{ ce qui conduit donc aux 4 points fixes } \left\{ 0; 1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

La dernière racine n'est pas dans l'intervalle $[0; 1]$ donc ne peut pas être limite des deux suites extraites.

De même $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \in]\frac{1}{2}; \frac{3}{4}[$ ne peut être limite des deux suites extraites.

Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} = 0$ (décroissante, bornée par 0 et $s_0 = \frac{1}{2}$, la seule limite possible est 0)

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n+1} = 1$ (croissante, bornée par $s_1 = \frac{3}{4}$ et 1, la seule limite possible est 1).

Les deux suites extraites convergent vers des limites distinctes, donc s diverge.

Cor. 3.5 : Le cas où $a_1 = b_1$ étant évident, on peut supposer $a_1 < b_1$ (le dernier cas se traitant de manière identique).

f étant strictement croissante et comme $\forall x \in]0; a], 0 < f(x) < x$, on obtient immédiatement que les deux suites sont bien définies et strictement décroissantes.

Comme elles sont de plus minorées par 0, elles convergent. f étant continue, la limite est 0, unique point fixe de f . Notamment, $\exists p \in \mathbb{N}^*, 0 < b_{p+1} < a_1 < b_1$ (car b converge vers 0).

On démontre alors par récurrence que

$$(E) : \forall n \in \mathbb{N}^*, b_{p+n} < a_n < b_n$$

$$\text{Or } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \text{ et } b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ donc } f(b_n) = b_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n.$$

$$\text{\AA nouveau, une récurrence sur } p \text{ permet de montrer que, } \forall p \in \mathbb{N}^*, b_{n+p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n.$$

La suite b étant strictement positive, on déduit de l'encadrement (E) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{b_{p+n}}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < 1$$

puis, de l'équivalent $b_{n+p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ et du théorème des gendarmes que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

c'est-à-dire, par définition, que

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$$

Bonus : représentation graphique de la suite

