

E.V., polynômes, dénombrement, dérivation

L'usage d'une calculatrice est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1.

On dit que **deux mots sont des anagrammes** s'ils sont formés **des mêmes lettres en même nombre**. Par exemple, ACDC et DACC sont deux anagrammes.

- 1) Combien y a-t-il d'anagrammes au mot MATHS ?
- 2) Combien y a-t-il d'anagrammes au mot ASSE ?
- 3) Combien y a-t-il d'anagrammes au mot MISSISSIPPI ?
- 4) Combien y a-t-il d'anagrammes au mot ALLEZLESVERTS ?

Exercice 2.

On considère la fonction $f : \begin{cases} I & \rightarrow J \\ x & \mapsto \ln(1 + e^x) \end{cases}$ où I est l'ensemble de définition de f et J un intervalle qui sera précisé plus tard.

- 1) Quel l'ensemble I de définition de la fonction f ?
- 2) Étudier la fonction f . Montrer que c'est une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
- 3) Montrer que la représentation graphique \mathcal{C}_f de f possède deux asymptotes, dont une oblique d'équation $y = x$.
- 4) Faire une rapide ébauche de \mathcal{C}_f à partir des informations précédentes.
- 5) Montrer que f est une fonction $\mathcal{C}^\infty(I, J)$.

On note dans la suite g_n la dérivée n -ème de f .

$$\text{Ainsi } \forall x \in I, \begin{cases} g_0(x) & = f(x) \\ g_1(x) & = \frac{e^x}{1 + e^x} \\ g_2(x) & = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} \end{cases} .$$

- 6) Donner pour tout $x \in I$ une expression de $g_3(x)$.
- 7) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ de degré $n - 1$ tel que, en substituant $X = e^x$,

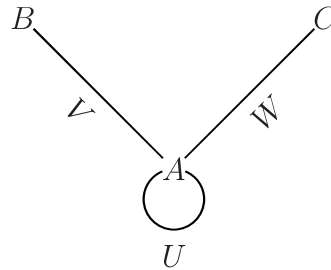
$$g_n(x) = \frac{P_n(e^x)}{(1 + e^x)^n}$$

- 8) Que peut-on dire de la propriété précédente lorsque $n = 1$?
- 9) Donner une propriété de récurrence vérifiée par P_{n+1} , P_n et sa dérivée P'_n pour $n \geq 2$.
- 10) Donner les polynômes P_2 et P_3 .
- 11) Énoncer le théorème de Rolle.
- 12) On admet qu'on peut généraliser le théorème de Rolle aux intervalles du type $]-\infty; +\infty[$, $]-\infty; a]$ ou $[a; +\infty[$.
Montrer que, pour n supérieur ou égal à 2, $g_n(x)$ possède $n - 2$ racines dans I .
- 13) En déduire que P_n possède $n - 1$ racines **positives** et qu'il est donc scindé.
- 14) Donner les racines de P_3 et P_4 .

Exercice 3.

Marche aléatoire sur un graphe

On considère le graphe non orienté ci-dessous, composé de 3 sommets $\{A; B; C\}$ et de 3 arêtes $\{(A; A); (A; B); (A; C)\}$.



Une marche aléatoire sur ce graphe est une suite d'arêtes consécutives **commençant sur le sommet A**. Chaque arête de la marche est appelée **pas**.

Une marche aléatoire pourra être donnée sous deux formes :

- la famille des sommets visités, qu'on convient de représenter sans parenthèses ni virgules ;
- un mot formé des lettres U , V et W en notant U la boucle AA , V l'arête AB et W l'arête AC .

Par exemple, une marche aléatoire possible à 2 pas est AAB (sous forme de famille) ou UV (sous forme de mot).

- 1) Donner, sous la forme de familles, toutes les marches aléatoires **à 2 pas** sur ce graphe.
- 2) Donner, sous la forme de mots, toutes les marches aléatoires **à 2 pas** sur ce graphe.
- 3) Combien y a-t-il de marches aléatoires **à 3 pas** sur ce graphe ?
- 4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note t_n le nombre de marches aléatoires à n pas sur ce graphe, a_n le nombre de marches aléatoires à n pas se terminant sur le sommet A , b_n le nombre de marches aléatoires à n pas se terminant sur le sommet B et c_n le nombre de marches aléatoires à n pas se terminant sur le sommet C de sorte que, par définition, $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n = a_n + b_n + c_n$.
 - a) Expliquer pourquoi on peut affirmer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $c_{n+1} = a_n$.
 - b) Donner des expressions similaires pour a_{n+1} et b_{n+1} .
 - c) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $t_{n+2} = t_{n+1} + 2t_n$.
 - d) Donner une formule explicite pour t_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
 - e) En déduire des formules explicites pour a_n, b_n et c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On identifie polynôme et fonction polynomiale associée. Pour tout entier $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on note P_k le polynôme

$$P_k = \prod_{i=0}^{k-1} (X + i)$$

Par exemple, $P_0 = 1$ (produit vide), $P_1 = X$, $P_2 = X(X + 1)$, etc...

On note \mathcal{B} la famille $\mathcal{B} = (P_0; P_1; P_2; \dots; P_n)$.

Enfin on définit l'application $\Delta : P \in E \mapsto P(X) - P(X - 1)$ et on note, pour $i \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^{(i)} = \underbrace{\Delta \circ \Delta \circ \dots \circ \Delta}_{i \text{ fonctions dans la composée}}$$

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de la famille \mathcal{B} et de l'application Δ .

- 1) Montrer que la famille \mathcal{B} est libre.
- 2) En déduire que \mathcal{B} est une base de E .
- 3) Montrer que Δ est linéaire.
- 4) Soit $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$. Montrer que $\Delta(P_{k+1}) = (k + 1)P_k$.
- 5) Que vaut $\Delta(P_0)$?
- 6) Conformément au résultat de la question 2), pour tout polynôme P de E , on note $(\alpha_0; \alpha_1; \dots; \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ses coordonnées dans \mathcal{B} .

$$\text{On a donc } P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k.$$

- a) Montrer que Δ est un endomorphisme de E et calculer les coordonnées de $\Delta(P)$ dans \mathcal{B} .
- b) Calculer α_0 en fonction de $P(0)$ et α_1 en fonction de $\Delta(P)(0)$.
- c) Conjecturer une formule reliant, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, α_k et $\Delta^{(k)}(P)(0)$.
- d) Démontrer la formule précédente.
- 7) En utilisant la question 6)a), calculer $\text{Ker}(\Delta)$ et $\text{Im}(\Delta)$.
- 8) Soit $k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$ et $N \in \mathbb{N}$.

$$\text{Déduire de la question 4) que } \sum_{i=1}^N P_k(i) = \frac{P_{k+1}(N)}{k + 1}.$$

- 9) On suppose dans cette question que $n \geq 3$.

En utilisant la question 6), donner les coordonnées de X^3 dans la base \mathcal{B} .

- 10) Soit $N \in \mathbb{N}$. Simplifier $T_N = \sum_{i=1}^N i^3$.