

# Correction DS n°6

## Exercice 1.

1) Le mot **MATHS** est composé de 5 lettres distinctes : le nombre d'anagrammes est donc égal au nombre de permutations de ces 5 lettres, c'est-à-dire  $5! = 120$  anagrammes.

2) Le mot **ASSE** est composé de 3 lettres distinctes, dont une, le **S**, répétée deux fois. Choisir un anagramme de **ASSE** consiste donc :

- à choisir la position des deux **S** parmi les 4 positions possibles :  $\binom{4}{2} = 6$  possibilités ;
- *puis* à choisir la position du **A** parmi les 2 positions restantes : 2 possibilités ;
- *puis* à placer le **E** dans le dernier emplacement restant : 1 possibilité.

En tout il y a donc 12 anagrammes pour le mot **ASSE**.

3) Le mot **MISSISSIPPI** est composé de 4 lettres **S**, 4 lettres **I**, 2 lettres **P** et une lettre **M**. En suivant le même raisonnement qu'à la question précédente, on obtient donc :

- pour les 4 lettres **S** :  $\binom{11}{4}$  possibilités ;
- *puis* pour les 4 lettres **I** :  $\binom{7}{4}$  possibilités ;
- *puis* pour les 2 lettres **I** :  $\binom{3}{2}$  possibilités ;
- *puis* pour le **M** : 1 possibilité.

En tout, il y a donc

$$\frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{4! \times 4! \times 2} = 11 \times 10 \times 9 \times 7 \times 5$$

c'est-à-dire  $990 \times 35 = 35000 - 350 = 34650$  anagrammes pour **MISSISSIPPI**.

4) Le mot **ALLEZLESVERTS** est composé de 3 lettres **E**, 3 lettres **L**, 2 lettres **S** et une lettre **A**, une lettre **Z**, une lettre **V**, une lettre **R**, une lettre **T**. En suivant le même raisonnement que précédemment, on obtient donc :

- pour les 3 lettres **E** :  $\binom{13}{3}$  possibilités ;
- *puis* pour les 3 lettres **L** :  $\binom{10}{3}$  possibilités ;
- *puis* pour les 2 lettres **S** :  $\binom{7}{2}$  possibilités ;
- *puis* pour le **A** : 5 possibilités ;
- *puis* pour le **Z** : 4 possibilités ;
- *puis* pour le **V** : 3 possibilités ;
- *puis* pour le **R** : 2 possibilités ;
- *puis* pour le **T** : 1 possibilité.

En tout, il y a donc

$$\frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{3! \times 3! \times 2} = 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 5 \times 2$$

anagrammes pour ALLEZLESVERTS.

Ici, le calcul final n'est pas demandé : une calculatrice donne

$$13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 5 \times 2 = 86\,486\,400 \text{ anagrammes.}$$

### Exercice 2.

1) Pour tout réel  $x$ ,  $1 + e^x > 1$  donc  $f$  est définie sur  $I = \mathbb{R}$ .

2)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Et pour tout réel  $x$ ,

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}, \text{ qui est strictement positif.}$$

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Comme de plus  $f$  est continue,  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $J = ]0; +\infty[$ .

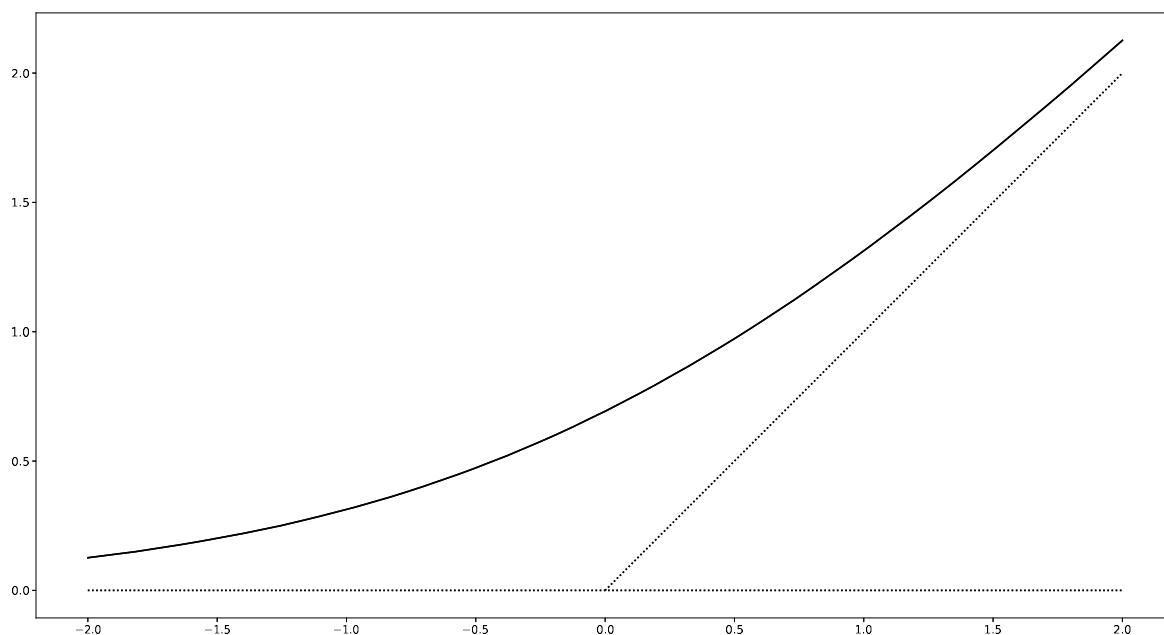
3) La limite en  $-\infty$  de  $f$  prouve qu'elle possède une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$ .

De plus, pour  $x > 0$ ,

$$f(x) - x = \ln(1 + e^x) - \ln(e^x) = \ln(1 + e^{-x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc la droite d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

4)



5)  $f$  est la composée  $x \mapsto 1 + e^x$  qui est  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, ]1; +\infty[)$  et de  $\ln$  qui est  $\mathcal{C}^\infty(]1; +\infty[, \mathbb{R}_+^*)$ , donc est  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ .

On note dans la suite  $g_n$  la dérivée  $n$ -ème de  $f$ .

$$\text{Ainsi } \forall x \in I, \begin{cases} g_0(x) = f(x) \\ g_1(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \\ g_2(x) = \frac{-e^x}{(1 + e^x)^2} \end{cases} .$$

6) Soit  $x$  un réel.

$$g_3(x) = g_2'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x \times 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x + (e^x)^2 - 2(e^x)^2}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x - (e^x)^2}{(1+e^x)^3}.$$

7) Montrons par récurrence que pour tout entier  $n \geq 2$ , il existe un polynôme  $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  de degré  $n-1$  tel que, en substituant  $X = e^x$ ,

$$g_n(x) = \frac{P_n(e^x)}{(1+e^x)^n}.$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

**Initialisation :**

$$g_2(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, \text{ on pose donc } P_2 = X \text{ qui satisfait la propriété,}$$

notamment  $\deg P_2 = 2 - 1 = 1$ .

$$g_3(x) = \frac{e^x - (e^x)^2}{(1+e^x)^3}, \text{ on pose donc } P_3 = X - X^2 \text{ qui satisfait aussi la propriété.}$$

**Hérédité :** supposons que pour  $n \geq 2$ , la propriété soit vraie, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme  $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  de degré  $n-1$  tel que, en substituant  $X = e^x$ ,

$$g_n(x) = \frac{P_n(e^x)}{(1+e^x)^n}.$$

$$\text{Alors } g_{n+1}(x) = (g_n(x))' = \frac{e^x P_n'(e^x) (1+e^x)^n - P_n(e^x) \times n e^x (1+e^x)^{n-1}}{(1+e^x)^{2n}}.$$

$$\text{Donc } g_{n+1}(x) = \frac{e^x P_n'(e^x) (1+e^x) - P_n(e^x) \times n e^x}{(1+e^x)^{n+1}} = \frac{P_{n+1}(e^x)}{(1+e^x)^{n+1}}$$

en posant  $P_{n+1} = X(1+X)P_n' - nXP_n$ .

On sait par ailleurs que  $\deg P_n = n-1$  donc que  $P_n$  peut s'écrire  $P_n = a_{n-1}X^{n-1} + Q_n$  avec  $\deg Q_n < n-1$ .

Donc  $P_{n+1} = X^2 a_{n-1} (n-1) X^{n-2} - n a_{n-1} X^n + Q_{n+1}$  avec  $\deg Q_{n+1} < n$ .

Donc  $P_{n+1} = ((n-1) - n) a_{n-1} X^n + Q_{n+1} = -a_{n-1} X^n + Q_{n+1}$

avec  $-a_{n-1} \neq 0$  et  $\deg Q_{n+1} < n$ .

Donc  $\deg P_{n+1} = n = (n+1) - 1$ .

**Conclusion :** la propriété est initialisée pour  $n = 2$ , héréditaire à partir de ce rang, donc vraie pour tout entier  $n \geq 2$ .

**Remarque :** on aurait pu prouver facilement en complétant cette démonstration par récurrence que  $X$  divise  $P_n$  pour tout entier  $n \geq 2$  et que le coefficient dominant de  $P_n$  est  $(-1)^n$ .

8)  $g_1(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$  : pour  $n = 1$ , il faudrait donc poser  $P_1 = X$  qui est de degré 1, et non pas 0. Par ailleurs, dans ce cas, non seulement la propriété n'est pas initialisée, mais l'hérédité n'est pas non plus valable puisque

si l'on a bien  $P_2 = X(1+X)P_1' - XP_1$ , cela conduit à  $P_2 = X + X^2 - X^2 = X = P_1$  dont le degré est le même que celui de  $P_1$ .

9) Nous avons prouvé dans la récurrence de la question 7) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow P_{n+1} = X(1+X)P_n' - nXP_n$$

10) Nous l'avons vu question 7) :

$$P_2 = X \text{ et}$$

$$P_3 = X - X^2$$

11) Soit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ .

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur  $[a; b]$ , dérivable sur  $]a; b[$ , telle que  $f(a) = f(b)$ .

Alors  $\exists c \in ]a; b[, f'(c) = 0$ .

12) On admet qu'on peut généraliser le théorème de Rolle aux intervalles du type  $]-\infty; +\infty[$ ,  $]-\infty; a[$  ou  $[a; +\infty[$ .

Montrons par récurrence que, pour  $n$  supérieur ou égal à 2,  $g_n(x)$  possède  $n - 2$  racines dans  $I$ .

**Initialisation :**

$\forall x \in \mathbb{R}, g_2(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$  est strictement positif, donc ne s'annule jamais :  $g_2$  possède  $0 = 2 - 2$  racine.

De plus,  $\lim_{n \rightarrow -\infty} g_2(x) = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_2(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{2x} (e^{-x} + 1)^2} = 0$ .

Donc d'après le théorème de Rolle généralisé,  $\exists c \in \mathbb{R}$  tel que  $g'_2 = g_3$  s'annule.

$g_3$  possède donc au moins  $1 = 3 - 2$  racine sur  $\mathbb{R}$ .

Nous allons utiliser cette idée dans l'hérédité.

**Hérédité :** supposons que pour  $n \geq 2$  entier donné,  $g_n$  possède  $n - 2$  racines réelles distinctes que nous noterons  $c_1 < c_2 < \dots < c_{n-2}$ .

Comme on sait, par ailleurs que  $g_n(x) = \frac{P_n(e^x)}{(1 + e^x)^2}$  avec  $\deg P_n = n - 1$ ,

on peut aussi affirmer que  $\lim_{n \rightarrow -\infty} g_n(x) = 0$  (car  $X$  divise  $P_n$  d'après la formule de récurrence donnée question 9)

et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = 0$  car  $g_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_{n-1} e^{(n-1)x}}{e^{nx}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

En utilisant le théorème de Rolle ou le théorème de Rolle généralisé sur les intervalles  $]-\infty; c_1[$ ,  $[c_1; c_2]$ , ...,  $[c_{n-2}; +\infty[$ , on peut donc affirmer que  $g'_n$  possède  $n - 1$  racines distinctes, respectivement dans les intervalles  $]-\infty; c_1[$ ,  $]c_1; c_2[$ , ...,  $]c_{n-2}; +\infty[$ .

Mais  $g'_n$  n'est autre que  $g_{n+1}$ . Donc  $g_{n+1}$  possède  $n - 1 = (n + 1) - 2$  racines réelles distinctes, ce qu'il fallait démontrer.

**Conclusion :** la propriété est vraie pour tout entier  $n \geq 2$ .

13) Soit  $n \geq 2$ .

Nous l'avons vu dans la démonstration précédente,  $X$  divise  $P_n$ , car il divise  $P_2$  et que  $P_{n+1} = X((1 + X)P'_n - nP_n)$ .

Donc 0 est racine de  $P_n$ .

De plus,  $g_n(x) = 0 \Leftrightarrow P_n(e^x) = 0 \Leftrightarrow e^x$  est une racine de  $P_n$ .

Comme  $g_n$  possède  $n - 2$  racines réelles distinctes  $c_1 < \dots < c_{n-2}$  d'après la question précédente,  $P_n$  possède  $n - 2$  racines réelles **strictement positives** qui sont  $e^{c_1} < \dots < e^{c_{n-2}}$  (exp étant bijective croissante de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ).

Donc  $P_n$  possède  $n - 1$  racines **positives** qui sont  $0 < e^{c_1} < \dots < e^{c_{n-2}}$ .

Enfin  $\deg P_n = n - 1$ , donc on connaît toutes les racines de  $P_n$  qui est donc scindé sur  $\mathbb{R}$ , à racines simples.

14)  $P_3 = X - X^2 = X(1 - X)$  a pour racines 0 et 1.

$P_4 = X((1 + X)(1 - 2X) - 3X + 3X^2) = X(1 - 4X + X^2)$ .

$P_4$  a donc pour racines 0,  $\frac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}$  et  $2 + \sqrt{3}$ .

### Exercice 3.

1)  $AAA, AAB, AAC, ABA, ACA$ .

2)  $UU, UV, UW, VV, WW$ .

3) On vient de le voir, il y a 5 marches à 2 pas.

Et il y a 11 marches à 3 pas qui sont  $UUU, UUV, U UW, UVV, UWW, VVU, VVV, VVW, WWU, WWV, WWW$ .

4) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $t_n$  le nombre de marches aléatoires à  $n$  pas sur ce graphe,

$a_n$  le nombre de marches aléatoires à  $n$  pas se terminant sur le sommet  $A$

$b_n$  le nombre de marches aléatoires à  $n$  pas se terminant sur le sommet  $B$

et  $c_n$  le nombre de marches aléatoires à  $n$  pas se terminant sur le sommet  $C$

de sorte que, par définition,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n = a_n + b_n + c_n$ .

a) Supposons qu'après  $n + 1$  pas on se retrouve sur  $C$ . Comme il n'y a qu'une seule arête qui arrive en  $C$ , au pas précédent on se trouvait **obligatoirement** sur le point  $A$  : il y a donc autant de marche en  $n + 1$  pas se terminant sur  $C$  que de marche en  $n$  pas se terminant sur  $A$ , c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, c_{n+1} = a_n$$

b) Le même raisonnement peut être conduit pour les marches se terminant sur  $B$ , donc on a aussi  $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_{n+1} = a_n$ .

En revanche, si après  $n + 1$  pas on se trouve sur  $A$ , c'est qu'au pas précédent on se trouvait **ou bien** sur  $A$ , **ou bien** sur  $B$ , **ou bien** sur  $C$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n + b_n + c_n$ . **En particulier**,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = t_n$ .

c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} t_{n+2} &= a_{n+2} + b_{n+2} + c_{n+2} \\ &= t_{n+1} + a_{n+1} + a_{n+1} \\ &= t_{n+1} + 2a_{n+1} \\ &= t_{n+1} + 2t_n \end{aligned}$$

d) On sait par ailleurs que  $t_1 = 3$  (3 marches à 1 pas qui sont  $U, V$  et  $W$ ), et que  $t_2 = 5$ .

Ceci conduit à l'équation caractéristique  $r^2 - r - 2 = 0$ ,  $\Delta = 1 + 8 = 9$ ,

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \in \{-1; 2\}.$$

Donc il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , tels que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$ .

$$\text{Les conditions initiales donnent } \begin{cases} -\lambda + 2\mu = 3 \\ \lambda + 4\mu = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-1}{3} \\ \mu = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n = \frac{(-1)^{n+1} + 2^{n+2}}{3}$$

e) Comme nous l'avons vu aux question précédentes,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = t_n \text{ et } b_{n+1} = c_{n+1} = a_n.$$

Donc

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n &= \frac{(-1)^{n-1} + 2^n}{3} \\ c_n &= \frac{(-1)^{n-1} + 2^n}{3} \end{aligned}$$

### Exercice 4.

1) Soit  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ .

$$\deg(P_k) = \sum_{i=0}^{k-1} \deg(X+i) = \sum_{i=0}^{k-1} 1 = k$$

La famille  $\mathcal{B}$  est donc échelonnée en degrés, ne contient pas le polynôme nul : elle est donc libre.

2) Or  $\mathcal{B}$  contient  $n+1$  vecteurs de  $E$ ,  $\dim(E) = n+1$ , c'est donc une base de  $E$ .

3) Soit  $P \in E$ ,  $Q \in E$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,

$$\Delta(\lambda P + \mu Q) = \lambda P + \mu Q - \lambda P(X-1) - \mu Q(X-1) = \lambda \Delta(P) + \mu \Delta(Q).$$

Donc  $\Delta$  est linéaire.

4) Soit  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ .

$$\begin{aligned} \Delta(P_{k+1}) &= \prod_{i=0}^k (X+i) - \prod_{i=0}^k (X+i-1) \\ &= \prod_{i=0}^k (X+i) - \prod_{i=-1}^{k-1} (X+i) \\ &= (X+k) \prod_{i=0}^{k-1} (X+i) - (X-1) \prod_{i=0}^{k-1} (X+i) \\ &= (X+k - X+1) \prod_{i=0}^{k-1} (X+i) \\ &= (k+1)P_k \end{aligned}$$

5)  $\Delta(P_0) = 1 - 1 = 0$  est le polynôme nul.

6) Conformément au résultat de la question 2), pour tout polynôme  $P$  de  $E$ , on note  $(\alpha_0; \alpha_1; \dots; \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  ses coordonnées dans  $\mathcal{B}$ .

$$\text{On a donc } P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k.$$

a)  $\Delta(P) = \Delta\left(\sum_{k=0}^n \alpha_k P_k\right) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \Delta(P_k)$  car  $\Delta$  est linéaire.

Donc  $\Delta(P) = \sum_{k=1}^n \alpha_k k P_{k-1}$  d'après les questions 4 et 5. En effectuant un changement

d'indice, on a donc  $\Delta(P) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \alpha_{k+1} P_k$ .

Donc  $\Delta(P) \in \text{Vect}(P_0; P_1; \dots; P_{n-1})$  qui est un sous-espace vectoriel de  $E$  : donc  $\Delta$  est un endomorphisme de  $E$  et les coordonnées de  $\Delta(P)$  dans  $\mathcal{B}$  sont

$$(\alpha_1; 2\alpha_2; \dots; n\alpha_n; 0)$$

b) Tous les polynômes  $P_1, P_2, \dots, P_n$  sont divisibles par  $X$  par définition.

Donc  $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, P_k(0) = 0$ .

Donc,  $P(0) = \alpha_0 P_0(0) + \alpha_1 P_1(0) + \dots + \alpha_n P_n(0) = \alpha_0$ .

Donc  $\alpha_0 = P(0)$ .

De même,  $\Delta(P) = \alpha_1 P_0 + 2\alpha_2 P_1 + \dots + n\alpha_n P_{n-1}$

donc  $\alpha_1 = \Delta(P)(0)$  en évaluant en 0.

c) On prend exemple sur la question précédente pour obtenir  $\alpha_2$  :

$$\Delta(\Delta(P)) = \Delta^{(2)}(P) = 2\alpha_2 P_0 + 2 \times 3\alpha_3 P_1 + \dots + n(n-1)\alpha_n P_{n-2},$$

puis, en évaluant en 0,  $2\alpha_2 = \Delta^{(2)}(P)(0)$  donc  $\alpha_2 = \frac{\Delta^{(2)}(P)(0)}{2}$ .

On peut poursuivre ainsi et conjecturer que

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \alpha_k = \frac{\Delta^{(k)}(P)(0)}{k!}$$

d) Démontrons par récurrence finie que

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \Delta^{(k)}(P) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(k+i)!}{i!} \alpha_{k+i} P_i$$

**Initialisation** : nous avons déjà démontré la formule au rang  $k = 1$  dans la question 6)b) :

$$\Delta^{(1)}(P) = \Delta(P) = \alpha_1 P_0 + 2\alpha_2 P_1 + \dots + n\alpha_n P_{n-1} = \frac{1!}{0!} \alpha_1 P_0 + \frac{2!}{1!} \alpha_2 P_1 + \dots + \frac{n!}{(n-1)!} \alpha_n P_{n-1}$$

**Hérédité** : supposons la formule vraie pour un entier  $k$  donné dans  $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$ .

Alors,  $k+1 \in \llbracket 2; n \rrbracket$ .

De plus :

$$\begin{aligned} \Delta^{(k+1)}(P) &= \Delta(\Delta^{(k)}(P)) \\ &= \Delta\left(\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(k+i)!}{i!} \alpha_{k+i} P_i\right) && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(k+i)!}{i!} \alpha_{k+i} \Delta(P_i) && \text{par linéarité} \\ &= \sum_{i=1}^{n-k} \frac{(k+i)!}{i!} i \alpha_{k+i} P_{i-1} && \text{d'après les questions 4) et 5)} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{(k+i+1)!}{(i+1)!} (i+1) \alpha_{k+i+1} P_i && \text{par changement d'indice} \\ &= \sum_{i=0}^{n-(k+1)} \frac{(k+1+i)!}{i!} \alpha_{k+1+i} P_i \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

**Conclusion** : pour tout entier  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\Delta^{(k)}(P) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(k+i)!}{i!} \alpha_{k+i} P_i$ .

En évaluant en 0, comme  $P_i(0) = 0$  pour tout entier  $i > 0$ ,

on obtient pour tout entier  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\Delta^{(k)}(P)(0) = \frac{k!}{0!} \alpha_k P_0 = k! \alpha_k$$

Ce qui achève la démonstration :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \alpha_k = \frac{\Delta^{(k)}(P)(0)}{k!}$$

7) D'après la question 6)a), pour tout polynôme  $P \in E$  décomposé dans la base  $\mathcal{B}$  sous la

forme  $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k$ , on a :

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \alpha_{k+1} P_k$$

**Calculons**  $\text{Ker}(\Delta)$  :  $\Delta(P) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, (k+1) \alpha_{k+1} = 0$  puisque  $\mathcal{B}$  est une base, donc est libre.

Donc  $P \in \text{Ker}(\Delta)$  si et seulement si  $P = \alpha_0 P_0$ . Donc

$$\text{Ker}(\Delta) = \text{Vect}(P_0) = \mathbb{R}_0[X]$$

Par ailleurs,  $\text{Im}(\Delta) \subset \text{Vect}(P_0; P_1; \dots; P_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$  d'après la question 6)a) toujours.

Or, en utilisant la formule du rang, on a

$$\dim(\text{Im}(\Delta)) = \dim(\mathbb{R}_{n+1}[X]) - \dim(\text{Ker}(\Delta)) = n + 1 - 1 = n.$$

Donc  $\text{Im}(\Delta)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , de même dimension que  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  :

$$\text{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

8) Soit  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  et  $N \in \mathbb{N}$ .

D'après la question 4),  $\Delta(P_{k+1}) = P_{k+1}(X) - P_{k+1}(X-1) = (k+1)P_k(X)$ .

Cette égalité est donc aussi vraie pour les fonctions polynomiales.

Donc  $\sum_{i=1}^N P_k(i) = \sum_{i=1}^N \frac{P_{k+1}(i) - P_{k+1}(i-1)}{k+1} = \frac{P_{k+1}(N) - P_{k+1}(0)}{k+1}$  par télescopage.

Or  $k+1 > 0$  donc  $P_{k+1}(0) = 0$ .

On obtient finalement

$$\sum_{i=1}^N P_k(i) = \frac{P_{k+1}(N)}{k+1}$$

9) On suppose  $n \geq 3$ .

Notons  $(a_0; a_1; a_2; a_3; 0; \dots; 0)$  les coordonnées de  $Q = X^3$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

En utilisant la question 6)d) :

$$a_0 = Q(0) = 0$$

$$\Delta(Q) = X^3 - (X^3 - 3X^2 + 3X - 1) = 3X^2 - 3X + 1$$

$$a_1 = \Delta(Q)(0) = 1$$

$$\Delta^{(2)}(Q) = 3X^2 - 3X - (3X^2 - 6X + 3 - 3X + 3) = 6X - 6$$

$$a_2 = \frac{\Delta^{(2)}(Q)(0)}{2} = -3$$

$$\Delta^{(3)}(Q) = 6X - (6X - 6) = 6$$

$$a_3 = \frac{6}{3!} = 1$$

Donc

$$Q = X^3 = P_1 - 3P_2 + P_3$$

10) Soit  $N \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
T_N &= \sum_{i=1}^N i^3 \\
&= \sum_{i=1}^N P_1(i) - 3P_2(i) + P_3(i) \\
&= \frac{P_2(N)}{2} - 3\frac{P_3(N)}{3} + \frac{P_4(N)}{4} \\
&= \frac{2N^2(N+1) - 4N(N+1)(N+2) + N(N+1)(N+2)(N+3)}{4} \\
&= N(N+1)\frac{2 - 4N - 8 + N^2 + 5N + 6}{4} \\
&= N(N+1)\frac{N^2 + N}{4} \\
&= \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^N i^3 = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2$$