Maths - DS n°6 - Lundi 3 juin, 3 heures

E.V. de dimension finie, suites, matrices, proba

L'usage d'une calculatrice est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1.

CCP TSI 2023

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Enfin on définit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A, $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$b_1 = (0;1;1) \qquad b_2 = (1;1;0) \qquad b_3 = (0;0;1)$$

1) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
2) Montrer que $\mathcal{B} = (b_1; b_2; b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) On note P la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$: $P = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
   Déterminer P et vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
5) Déterminer une relation entre A, P, T et P^{-1}.

6) On note $T = N + D$ où D est une matrice diagonale et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer D et vérifier que N et D commutent.

7) Que vaut N^n pour $n \geqslant 2$ entier ?

8) Déduire de ce qui précède une expression de T^n pour $n \in \mathbb{N}$.
On donnera chacun de ses coefficients.

9) Pour $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre X_{n+1}, A et X_n.

10) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n en fonction de A, n et X_0.

11) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de T^n, P et P^{-1}.
Démontrer cette relation par récurrence.

12) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 2.

Centrale PSI 2021

On rappelle qu'un graphe orienté G est la donnée $G = (S; A)$ d'un ensemble de sommets S (fini) et d'un ensemble $A \subset S^2$ d'arêtes de la forme $(s; s')$ où $s \in S, s' \in S$. Les éléments de A sont appelés ***arêtes*** du graphe.
On dit que s' ***est un voisin de*** s si et seulement si $(s; s') \in A$.
On remarque que s peut être son propre voisin (si $(s; s) \in A$) et que s' peut être un voisin de s sans que s soit un voisin de s' (dans le cas où $(s; s') \in A$ mais que $(s'; s) \notin A$).
Dans la suite, sauf mention contraire, $G = (S; A)$ est un graphe, et S est composé de $n \in \mathbb{N}^*$ sommets qui sont numérotés de 1 à n. On s'intéresse dans cet exercice ***aux marches aléatoires sur le graphe*** G : un point se déplace ***aléatoirement*** sur le graphe, et à chaque étape, il passe du sommet où il se trouve ***vers l'un des voisins de ce sommet, avec équiprobabilité***. Ceci entraîne notamment que la probabilité de passer d'un sommet à un voisin de ce sommet ne dépend pas de l'étape de la marche aléatoire.
Pour $i \in [\![1; n]\!]$ et $j \in [\![1; n]\!]$, on note $t_{i,j}$ la probabilité que le point se déplace du sommet i au sommet j lors d'une étape de la marche ; en particulier, s'il n'y a pas d'arête reliant i à j, $t_{i,j} = 0$.
La matrice dont le coefficient ***ligne*** i ***et colonne*** j vaut $t_{i,j}$ est notée T et s'appelle ***matrice de transition du graphe***.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $P^{(k)}$ le vecteur ligne $P^{(k)} = \left(p_1^{(k)}; p_2^{(k)}; ...; p_{n-1}^{(k)}; p_n^{(k)}\right)$ où, pour $i \in [\![1; n]\!]$, $p_i^{(k)}$ est la probabilité que le point soit sur le sommet numéro i à l'étape k de la marche.

1) Justifier que, pour tout entier naturel k, $p_1^{(k)} + ... + p_n^{(k)} = 1$.

2) Montrer que, pour tout entier naturel k, $P^{(k+1)} = P^{(k)}T$.

3) En déduire, pour tout entier naturel k, une expression de $P^{(k)}$ en fonction de T, k et $P^{(0)}$.

4) On suppose que la suite de vecteur $\left(P^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $P = (p_1; ...; p_n)$ (au sens où chacune des composantes de $P^{(k)}$ converge vers la composante correspondante de P).
Montrer que $PT = P$, que, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $p_i \in [0; 1]$ et que $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

5) ***Marche aléatoire sur un tétraèdre***

Dans cette question, on considère que

$$\begin{cases} S = \{1;2;3;4\} \\ A = \{(1;2);(1;3);(1;4);(2;1);(2;3);(2;4);(3;1);(3;2);(3;4);(4;1);(4;2);(4;3)\} \end{cases}$$

La Figure 1 représente ce graphe.

On rappelle que, lorsque le point se trouve sur un sommet du graphe, il a la même probabilité de se rendre, à la prochaine étape, sur chacun des trois autres sommets du graphe.

Enfin, on pose $J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

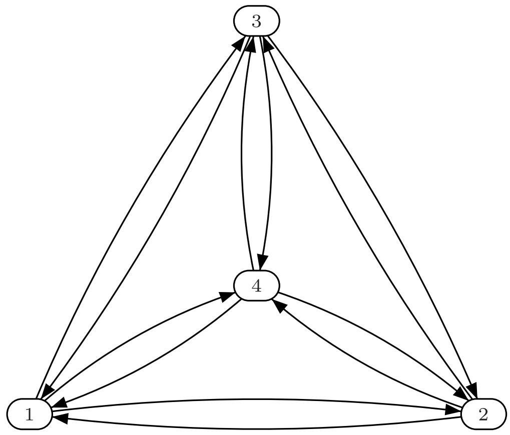

Figure 1 : graphe du tétraèdre.

a) Exprimer la matrice de transition T en fonction de I_4 et J_4.

b) Soit $\mathcal{B} = \left(\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{2};\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right);\left(\frac{2}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{-2}{\sqrt{10}};\frac{-1}{\sqrt{10}}\right);\left(\frac{-1}{\sqrt{10}};\frac{2}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{-2}{\sqrt{10}}\right)\right)$.
Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

c) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à T et $\mathcal{C}$ la base canonique de R^4.
Donner la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

d) On pose $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
Donner les coefficients de la matrice Q.

e) Justifier que Q est inversible et vérifier que $Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$.

f) Déduire des questions précédentes une relation donnant la matrice T en fonction des matrices M, Q et Q^{T}.

g) En déduire une relation donnant T^k en fonction de M, Q, Q^{T} et $k \in \mathbb{N}$.

h) Montrer que, quel que soit $P^{(0)} = \left(p_1^{(0)};p_2^{(0)};p_3^{(0)};p_4^{(0)}\right)$ donnant les probabilités que le point mobile se trouve au début de la marche aléatoire sur chacun des sommets du tétraèdre, la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur ligne $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.