Correction DS n°6

Exercice 1.

1) Effectuons l'algorithme du pivot sur la matrice $(A|X)$:

$$\begin{aligned}
(A|X) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ -1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 2 & -1 & 1 & x \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -z \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 3 & x+2z \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -z \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 2 & x+2z-y \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & y-z \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x}{2}+z-\frac{y}{2} \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & y-z \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{x}{2}+\frac{3y}{2}-z \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x}{2}+z-\frac{y}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

2) Il s'agit de montrer que $\mathcal{B} = (b_1; b_2; b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Commençons par remarquer que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \operatorname{Card}(\mathcal{B})$: il suffit donc de démontrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre.
Soit $(\lambda; \mu; \nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3 = (0; 0; 0)$.
On a donc $(\mu; \lambda + \mu; \lambda + \nu) = (0; 0; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu &= 0 \\ \lambda + \mu &= 0 \\ \lambda + \nu &= 0 \end{cases}$
La première ligne permet d'affirmer que $\mu = 0$, en reportant dans la seconde on obtient $\lambda = 0$ et la dernière ligne donne alors $\nu = 0$.
Donc la famille $\mathcal{B}$ est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) Les coordonnées de $f(b_1)$ dans la base canonique sont données par

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc $f(b_1) = (0;2;2) = 2b_1$.

De même, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $f(b_2) = (1;1;0) = b_2$.

Enfin $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $f(b_3) = (1;1;1) = b_2 + b_3$.

Donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) On note P la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$: $P = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

Par définition des matrices de passage, et par définition de la famille $\mathcal{B}$, on a donc

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus :

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5) Par définition :

- $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$
- $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$
- $P = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$

D'après la formule de changement de bases pour les endomorphismes, on a donc

$$A = PTP^{-1}$$

6) On note $T = N + D$ où D est une matrice diagonale et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par définition, $D = T - N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

De plus $ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$

et $DN = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$

Donc N et D commutent.

7) $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$

Donc, pour tout entier $n \geqslant 2$, $N^n = N^2 \times N^{n-2} = 0_3 \times N^{n-2} = 0_3$.

8) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} T^n &= (D+N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} D^{n-k} N^k \qquad \text{car } N \text{ et } D \text{ commutent} \\ &= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} D^n I_3 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} D^{n-1} N \qquad \text{d'après la question précédente} \\ &= D^n + nN \qquad \text{car} \quad D^{n-1}N = D(D(...(DN)...)) = N \end{aligned}$$

Ainsi,

$$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9) Par définition de la matrice A et des suites u, v et w, on a, pour tout entier naturel n :

$$X_{n+1} = AX_n$$

10) Par analogie avec les suites réelles géométriques, on démontre donc par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$$

L'***initialisation*** est immédiate puisque $A^0 = I_3$.

Pour l'***hérédité*** : supposons la formule vraie pour un entier n donné.

Alors $X_{n+1} = AX_n = A\left(A^n X_0\right) = \left(AA^n\right) X_0 = A^{n+1} X_0$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

11) Montrons à nouveau par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

Initialisation : pour $n = 0$, $A^n = I_3$ et $PT^nP^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

Hérédité : supposons que pour n entier naturel donné, on ait $A^n = PT^nP^{-1}$.

Alors $A^{n+1} = AA^n = PTP^{-1}PT^nP^{-1} = PTT^nP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$.

Conclusion : la formule est initialisée au rang 0, héréditaire à partir de ce rang, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}$$

12) En reprenant les résultats des questions 8), 10) et 11), on obtient donc, pour n entier naturel :

$X_n = A^n X_0 = PT^nP^{-1}X_0$.

Or $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc $X_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & n \\ 2^n & 1 & n \\ 2^n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & n \\ 2^n & 1 & n \\ 2^n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1-2^n \\ 1-2^n \end{pmatrix}$

On a donc pour les suites u, v et w les formules explicites suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n & = & n+1 \\ v_n & = & n+1-2^n \\ w_n & = & 1-2^n \end{cases}$$

Exercice 2.

1) En notant $A_{i,k}$ l'événement « le point mobile se trouve sur le sommet i à l'étape k », étant donné un entier k, la famille $(A_{i,k})_{i \in [\![1;n]\!]}$ est un système complet d'événements puisque, à l'étape k, le point se trouve toujours sur un sommet, et sur un seul !
Donc $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_{k,i}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
Donc $p_1^{(k)} + ... + p_n^{(k)} = 1$.

2) La famille $(A_{i,k})_{i \in [\![1;n]\!]}$ est un système complet d'événements, et on admet qu'aucune des probabilités $\mathbb{P}(A_{i,k}) = p_i^{(k)}$ n'est nulle (hypothèse fondamentale pour pouvoir conditionner par les événements de la famille).
On a alors, en utilisant la formule des probabilités totales, pour $j \in [\![1;n]\!]$ et $k \in \mathbb{N}$ donnés :
$p_j^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_{i,k}}(A_{j,k+1}) \mathbb{P}(A_{i,k})$
Or $\mathbb{P}_{A_{i,k}}(A_{j,k+1}) = t_{i,j}$ par définition. Et $\mathbb{P}(A_{i,k}) = p_i^{(k)}$.
Donc $p_j^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} t_{i,j}$ et ceci pour tout $j \in [\![1;n]\!]$.
On retrouve ici la formule du produit matriciel entre le vecteur ligne $P^{(k)}$ et la matrice T : donc, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,
$$P^{(k+1)} = P^{(k)} T$$

3) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $P^{(k)} = P^{(0)} T^k$.
Initialisation : pour $k = 0$, $P^{(0)} T^0 = P^{(0)} I_n = P^{(0)}$.
Hérédité : supposons que pour $k \in \mathbb{N}$ donné on ait $P^{(k)} = P^{(0)} T^k$.
Alors $P^{(k+1)} = P^{(k)} T = P^{(0)} T^k T$ par hypothèse de récurrence.
Donc $P^{(k+1)} = P^{(0)} T^{k+1}$.
Conclusion : la propriété est initialisée au rang 0, héréditaire à partir de ce rang, donc vraie pour tout entier naturel k.

4) D'après la question précédente, pour $j \in [\![1;n]\!]$ et $k \in \mathbb{N}$ donnés : $p_j^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} t_{i,j}$
En passant à la limite $k \to +\infty$ dans cette égalité, dans la mesure où toutes les suites $\left(p_i^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ sont convergentes, on a donc :
$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i t_{i,j}$$

Ceci étant vrai pour tout j, on a donc, à nouveau en interprétant cette somme comme issue d'un produit matriciel :

$$P = PT$$

Par ailleurs, pour i et k donnés, $p_i^{(k)}$ est une valeur de probabilité donc
$\forall i \in [\![1;n]\!], \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leqslant p_i^{(k)} \leqslant 1$.
Par passage à la limite $k \to +\infty$ dans cet encadrement, ceci pour tout i, on a donc

$$\forall i \in [\![1;n]\!], p_i \in [0;1]$$

Enfin, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $p_1^{(k)} + p_2^{(k)} + ... + p_n^{(k)} = 1$ car $(A_{i,k})_{i \in [\![1;n]\!]}$ est un système complet d'événements.
À nouveau par passage à la limite, on a donc $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

5) ***Marche aléatoire sur un tétraèdre***

a) Chaque sommet du tétraèdre possède 3 voisins, et il y a équiprobabilité pour les transitions d'un sommet à ses voisins.
Donc, partant par exemple du sommet 1, on a $t_{1,2} = t_{1,3} = t_{1,4} = \dfrac{1}{3}$ (et $t_{1,1} = 0$) et de même en partant des autres sommets.
Donc $T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.
Donc $T = \dfrac{1}{3}(J_4 - I_4)$.

b) Soit $\mathcal{B} = \left(\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{2};\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right);\left(\frac{2}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{-2}{\sqrt{10}};\frac{-1}{\sqrt{10}}\right);\left(\frac{-1}{\sqrt{10}};\frac{2}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{-2}{\sqrt{10}}\right)\right)$.
$\text{Card}\,\mathcal{B} = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$.
Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, il suffit donc de démontrer qu'elle est libre.
Soit $(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$ tels que
$a\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)+b\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{2};\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right)+c\left(\frac{2}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{-2}{\sqrt{10}}+d\frac{-1}{\sqrt{10}}\right);\left(\frac{-1}{\sqrt{10}};\frac{2}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{-2}{\sqrt{10}}\right) = (0;0;0;0)$.
Ceci conduit au système :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ a - b + c - d = 0 \\ 2a + b - 2c - d = 0 \\ -a + 2b + c - 2d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 0 & \\ -2b - 2d = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -b - 4c - 3d = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ 3b + 2c - d = 0 & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 0 & \\ b + d = 0 & L_2 \leftarrow \dfrac{-1}{2} L_2 \\ 8c + 4d = 0 & L_3 \leftarrow -2L_3 + L_2 \\ 4c - 8d = 0 & L_4 \leftarrow 2L_4 + 3L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 0 & \\ b + d = 0 & \\ 8c + 4d = 0 & \\ -20d = 0 & L_4 \leftarrow 2L_4 - L_3 \end{cases}$$

D'où l'on déduit que $d = 0$, donc $c = 0$ et $b = 0$, donc $a = 0$: la famille $\mathcal{B}$ est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

c) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à T et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Notons e_1, e_2, e_3 et e_4 les 4 vecteurs de la famille $\mathcal{B}$.

$f(e_1)$ a pour coordonnées dans la base canonique $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Donc $f(e_1) = e_1$.

De même, en effectuant les produits matriciels correspondants, on obtient :

$f(e_2) = \left(\frac{-1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{-1}{6}; \frac{1}{6}\right) = \dfrac{-1}{3} e_2$

$f(e_3) = \left(\frac{-2}{3\sqrt{10}}; \frac{-1}{3\sqrt{10}}; \frac{2}{3\sqrt{10}}; \frac{1}{3\sqrt{10}}\right) = \dfrac{-1}{3} e_3$

$f(e_4) = \left(\frac{1}{3\sqrt{10}}; \frac{-2}{3\sqrt{10}}; \frac{-1}{3\sqrt{10}}; \frac{2}{3\sqrt{10}}\right) = \dfrac{-1}{3} e_4$

Par définition, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d) On pose $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

Par définition, la matrice Q est donc la matrice des coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{-2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

e) Q est inversible puisque c'est une matrice de passage.
De plus, on vérifie que

$$QQ^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{-2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = I_4$$

donc que $Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$.

f) $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$
$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$
$Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$
$Q^{\mathrm{T}} = Q^{-1} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$
Donc, en utilisant la formule de changement de base pour les matrices d'endomorphismes, on a :

$$T = QMQ^{-1} = QMQ^{\mathrm{T}}$$

g) On en déduit que, pour $k \in \mathbb{N}$, $T^k = (QMQ^{-1}) \dots (QMQ^{-1}) = QM^kQ^{-1} = QM^kQ^{\mathrm{T}}$ par télescopage (ou en le démontrant par récurrence).

h) D'après la question 3), $P^{(k)} = P^{(0)}T^k = P^{(0)}QM^kQ^{\mathrm{T}}$ en utilisant aussi le résultat de la question précédente.

Donc $P^{(k)} = \begin{pmatrix} p_1^{(0)} & p_2^{(0)} & p_3^{(0)} & p_4^{(0)} \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^k}{3^k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-1)^k}{3^k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(-1)^k}{3^k} \end{pmatrix} Q^{\mathrm{T}}$.

Les produits matriciels étant des combinaisons linéaires des coefficients des matrices en facteur, la limite d'une combinaison linéaire étant la combinaison linéaire des limites, on peut effectuer la limite $k \to +\infty$ directement dans la matrice M^k, avant d'effectuer le produit. Donc la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge (car les coefficients de M^k convergent quand $k \to +\infty$) et la limite de la suite vaut

$$P = \begin{pmatrix} p_1^{(0)} & p_2^{(0)} & p_3^{(0)} & p_4^{(0)} \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{\mathrm{T}}.$$

Ou encore, en effectuant les produits par Q à gauche, et Q^{T} à droite :

$$P = \begin{pmatrix} p_1^{(0)} & p_2^{(0)} & p_3^{(0)} & p_4^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit

$$P = \left(\frac{p_1^{(0)} + p_2^{(0)} + p_3^{(0)} + p_4^{(0)}}{4}; \frac{p_1^{(0)} + p_2^{(0)} + p_3^{(0)} + p_4^{(0)}}{4}; \frac{p_1^{(0)} + p_2^{(0)} + p_3^{(0)} + p_4^{(0)}}{4}; \frac{p_1^{(0)} + p_2^{(0)} + p_3^{(0)} + p_4^{(0)}}{4} \right).$$

Or $p_1^{(0)} + p_2^{(0)} + p_3^{(0)} + p_4^{(0)} = 1$ (et ce par définition d'une probabilité et quel que soit le vecteur $P^{(0)}$).
Donc $P = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ est la limite de la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, indépendante du premier terme de cette suite.