Maths - Feuille d'exos n° 22

Séries

I. Séries à termes positifs, séries absolument convergentes

Ex. 22.1 Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ sur le segment $[0; x]$ pour les fonctions cos, sin, ch et sh.
2. Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes :

$$A = \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad B = \sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad C = \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$D = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3. Les résultats des questions précédentes se généralisent-ils à $x < 0$?

Ex. 22.2 Nature des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^n}$ et $v_n = 3^{\frac{1}{n}}$.

Ex. 22.3 Calculer, si existence, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Ex. 22.4 Déterminer la nature, et éventuellement calculer la somme, de la série $\displaystyle\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Ex. 22.5 Nature de la série $\sum n^n e^{-n^2}$.

Ex. 22.6 Nature de la série $\sum e^{-\sqrt{n}}$.

Ex. 22.7

1. Montrer que $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2, 2ab \leqslant a^2 + b^2$.
2. On suppose que la série à termes positifs $\sum u_n$ converge.

   Que peut-on dire de la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$?

Ex. 22.8 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive. Pour tout entier n, on pose $b_n = \dfrac{a_n}{1 + a_n}$.
Comparer la nature des séries de terme général a_n et b_n.

Ex. 22.9 On pose pour tout entier n, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^n(t)}{1 + t^n} \mathrm{d}t$.
Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

II. Autres séries

Ex. 22.10

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n}$ diverge.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge vers une limite dont on donnera le signe.
3. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on note $H_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.
   En déduire un encadrement de H_N.
4. Déduire de la question précédente que $H_N - \ln(N)$ converge. On note γ la limite.
5. Exprimer $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ à l'aide de la suite H.

6. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Ex. 22.11 En utilisant la question d. de l'exercice précédent, montrer que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k-1)(2k+1)}$ existe et donner sa valeur.

Ex. 22.12 Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + \sin(n)}$.

III. Pour aller plus loin

Ex. 22.13 Soit u la suite numérique définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
3. Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?
4. Donner un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.
5. La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

Ex. 22.14 (Cor.) Soient u et w définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \begin{array}{lcl} u_n & = & \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \\ v_n & = & \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}} \end{array} \right.$$

On note $S = \sum u_n$ et $T = \sum v_n$ les séries associées à ces deux suites.

1. Les séries S et T sont-elles absolument convergentes ?
2. Les séries S et T sont-elles à termes positifs ?
3. Montrer que S est une série convergente.
4. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
5. Soit $w = u - v$. Montrer qu'elle est de signe constant et donner un équivalent (simple) de w_n au voisinage de $+\infty$.
6. Montrer que T est une série divergente.

Ex. 22.15 (Cor.) Étant donnés $a, b, c \in \mathbb{R}$, on note pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$$

1. Donner les valeurs de a, b, c pour lesquelles la série $\sum u_n$ converge.
2. Calculer $\displaystyle\sum_1^{+\infty} u_n$ en cas de convergence ou donner un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ en cas de divergence.

Ex. 22.16 (Cor.) Soit u la suite définie par $u_n = \sin\left(2\pi\sqrt{1+n^2}\right)$ et $S = \sum u_n$.

1. Énoncer ***précisément*** le théorème sur la nature de séries à termes équivalents.
2. Donner un équivalent simple de u_n au voisinage de $+\infty$.
3. En déduire que S est une série à termes ***positifs à partir d'un certain rang***.
4. Nature de $\sum u_n$?

Cor. 22.14 :

1. Non, par critère de Riemann.
2. Non plus, c'est évident, un terme sur deux est négatif, un terme sur deux est positif.
3. On étudie $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ (deux suites extraites des sommes partielles) et on montre qu'elles sont adjacentes.
   En conséquence, elles convergent vers une même limite, et, S qui est la réunion de ces deux suites extraites, converge aussi.

4. Évident en étudiant la limite du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$.
5. Soit $w = u - v$.
$\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} w_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n}+(-1)^{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+(-1)^{n+1}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+(-1)^{n+1}\right)} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{1}{n} \times \left(1 + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \end{aligned}$$
De plus, w est positive puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n}+(-1)^{n+1} > 0$ et que $w_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+(-1)^{n+1}\right)}$.
6. D'après ce qui précède :
$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - w_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} w_k$.
Donc $T_n = S_n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k$.
Or S est une série convergente d'après la question 3, et $\displaystyle\sum_n w_n$ est une série à termes positifs vérifiant $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$: par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on peut donc conclure que $\displaystyle\sum_n w_n$ diverge vers $+\infty$.
Donc T diverge vers $-\infty$.

Cor. 22.15 :

1. Une condition ***nécessaire*** (mais ***non suffisante***) pour qu'une série converge est que son terme général tende vers 0.
Cherchons donc tout d'abord les valeurs de a, b, c pour lesquelles u converge vers 0.
$u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2) = a\ln(n) + b\ln\left(n\left[1+\frac{1}{n}\right]\right) + c\ln\left(n\left[1+\frac{2}{n}\right]\right)$.
Donc $u_n = (a+b+c)\ln(n) + b\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + c\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$.
Dans cette dernière expression, les deux derniers termes tendent vers 0.
Pour que la série converge, il est donc ***nécessaire*** que $a+b+c=0$.
Cherchons alors, sous cette hypothèse, un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.
$u_n = \dfrac{b}{n} - \dfrac{b}{2n^2} + \dfrac{2c}{n} - \dfrac{2c}{n^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   - Si $b+2c \neq 0$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{b+2c}{n}$, notamment u_n est du même signe que $b+2c$ à partir d'un certain rang.
   $\sum u_n$ est donc une série dont les termes sont de signe constant à partir d'un certain rang : la règle des équivalents s'applique et on peut affirmer que $\sum u_n$ diverge par comparaison avec la série $\sum \dfrac{1}{n}$ divergente.
   - Si $b+2c = 0$, c'est-à-dire si $b = -2c$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-c}{n^2}$ donc $u_n = \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ étant convergente, $\sum u_n$ converge.

Finalement, les valeurs de $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ pour lesquelles la série $\sum u_n$ converge sont les valeurs vérifiant
$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b+2c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= c \\ b &= -2c \end{cases}$$
$\sum u_n$ converge si et seulement si $(a;b;c) \in \mathrm{Vect}\big((1;-2;1)\big)$.
2. - Cas de convergence : $(a;b;c) = c(1;-2;1)$.
   $u_n = c\big(\ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)\big) = c\big(\ln(n) - \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(n+1)\big)$.
   Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = c\sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \ln(k+1) + \ln(k+2) - \ln(k+1)$
   ou encore $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = c\left(\ln(1) - \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(2)\right)$ par télescopage.
   Or $\ln(n+2) - \ln(n+1) = \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Donc
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -c\ln(2)$$
   - Cas de divergence :
   Si $a+b+c \neq 0$, la série diverge grossièrement et
   $$\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} (a+b+c)\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = (a+b+c)\ln(n!)$$

Si $a+b+c=0$ mais $b\neq -2c$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} (b+2c)\ln(n)$ par comparaison avec la série harmonique divergente.

Cor. 22.16 :

1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes ***positifs***.
   Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. $$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(2\pi\sqrt{1+n^2}\right)\\ &= \sin\left(2\pi n\sqrt{1+\tfrac{1}{n^2}}\right)\\ &= \sin\left(2\pi n\left[1+\tfrac{1}{2n^2}+o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right]\right)\\ &= \sin\left(2\pi n+\tfrac{2\pi}{2n}+o\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)\\ &= \sin\left(\tfrac{\pi}{n}+o\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)\\ &\underset{+\infty}{=} \tfrac{\pi}{n}+o\left(\tfrac{1}{n}\right)\end{aligned}$$
   Donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{n}$.
3. $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{n}$ d'après la question précédente.
   Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{\pi}{n}} = 1$.
   Notamment, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_n}{\frac{\pi}{n}} \geqslant \dfrac{1}{2}$.
   Donc, à partir d'un certain rang, u_n et $\dfrac{\pi}{n}$ sont de même signe : u_n est donc positive à partir d'un certain rang.
4. La série $\sum u_n$ est donc une série à termes positifs (à partir d'un certain rang) : ceci suffit à utiliser le théorème sur la nature des séries à termes équivalents.
   Or $\sum \dfrac{\pi}{n}$ diverge (série de Riemann divergente), donc $\sum u_n$ diverge.