

# Déterminant

## I. Déterminant d'une matrice, d'une famille de vecteurs

**Ex. 23.1** Calculer et factoriser les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos(2a) \\ 1 & \cos b & \cos(2b) \\ 1 & \cos c & \cos(2c) \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & a^p & a^n \\ b & b^p & b^n \\ c & c^p & c^n \end{vmatrix}$$

**Ex. 23.2** Calculer et factoriser les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \sin a \\ 1 & \cos b & \sin b \\ 1 & \cos c & \sin c \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{vmatrix}$$

**Ex. 23.3** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Calculer  $\det_{\mathcal{B}}(e_2 + e_3; e_3 + e_1; e_1 + e_2)$  puis  $\det_{\mathcal{B}}(e_1 + \lambda e_2; e_2 + \lambda e_3; e_3 + \lambda e_1)$ .

**Ex. 23.4** On se place dans  $\mathbb{R}_2[X]$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B}$ . Soient  $P_1 = (X + 1)^2$ ,  $P_2 = X + 1$  et  $P_3 = 9X - 5$ .

1. Montrer que la famille  $\mathcal{F} = (P_i)_{i \leq 3}$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Déterminer  $\det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ .

On pourra éventuellement traiter les deux questions en même temps.

**Ex. 23.5** Déterminer les valeurs de  $m \in \mathbb{R}$  pour lesquelles la famille  $((m + 1; m - 1); (4; -4 + 2m))$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

**Ex. 23.6** Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique est nul en dimension 3.

Est-ce le cas en dimension  $n = 2$  ?

Généraliser aux matrices antisymétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Ex. 23.7** On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ .

On note  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Exprimer  $A^n$  en fonction des termes de la suite de Fibonacci.
2. En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ .

**Ex. 23.8** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer qu'il n'existe pas de matrice  $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 + I_{2n+1} = 0_{2n+1}$ .

Donner une matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 + I_2 = 0_2$  puis une matrice  $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 + I_{2n} = 0_{2n}$ .

**Ex. 23.9** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ ,  $a_{ij} = \pm 1$ .

Montrer que  $2^{n-1}$  divise  $\det A$ .

**Ex. 23.10** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec  $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} = (-1)^{\max(i,j)}$ . Calculer  $\det A$ .

**Ex. 23.11** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} =$

$$\begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note  $\Delta_n = \det(A_n)$ .

1. Exprimer  $\Delta_n$  en fonction de  $n$  et montrer que  $A_n$  est inversible.
2. Soit  $X = (x_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .  
On suppose que  $A_n X$  est constitué de coefficients positifs ou nuls.  
A. Montrer que  $x_n \geq 0$ .

- B. Montrer que  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i \geq 0$ .
3. Montrer que  $A_n^{-1}$  est composée de coefficients positifs ou nuls.
4. Soit  $B_n = A_n - I_n$ . On note  $D_n = \det(B_n)$ .  
Montrer que  $D_{n+3} = -D_n$ .  
En déduire que  $B_n$  est inversible si et seulement si  $n + 1$  n'est pas un multiple de 3.

**Ex. 23.12 Centrale 2017 PSI Maths 1 - Extrait**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Pour toute matrice  $M$  de  $E$ , on note  $f_M$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  canoniquement associé à  $M$ .

On dit que  $f_M$  est **cyclique** s'il existe un vecteur  $u \in \mathbb{C}^n$  tel que  $(u; f_M(u); \dots; f_M^{n-1}(u))$  soit une base de  $\mathbb{C}^n$ .  $u$  est alors appelé **vecteur cyclique** de  $f_M$ .

On dit que  $f_M$  est **diagonalisable** s'il existe une base  $(e_1; \dots; e_n)$  de  $\mathbb{C}^n$  et un  $n$ -uplet  $(\lambda_1; \dots; \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  tel que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, f_M(e_i) = \lambda_i e_i$$

Autrement dit,  $f_M$  est diagonalisable si et seulement si  $f_M$  est une composée d'affinités.

On suppose dans la suite que  $f_M$  est diagonalisable et on note  $(e_1; \dots; e_n)$  la base de diagonalisation et  $(\lambda_1; \dots; \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  les scalaires associés.

Soit  $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i \in \mathbb{C}^n$ .

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $(u_1; \dots; u_n; \lambda_1; \dots; \lambda_n)$  pour que  $(u; f_M(u); \dots; f_M^{n-1}(u))$  soit une base de  $\mathbb{C}^n$ .

2. Soit  $A(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & \dots & x_{n-1} & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$  où  $x_1, \dots, x_{n-1}$

sont des nombres complexes.

- A. Montrer que  $A(x)$  est un polynôme en  $x$  dont on précisera le degré.

- B. Montrer que  $\forall i \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket, A(x_i) = 0$ .
- C. En déduire que  
 $A(x) = a(x_1, \dots, x_{n-1})(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}) = a(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - x_i)$   
où  $a(x_1, \dots, x_{n-1})$  est un complexe ne dépendant que de la valeur de  $x_1, \dots, x_{n-1}$ .
- D. Soit  $x_n \in \mathbb{C}$ . Montrer que

$$A(x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

3. Déduire des questions précédentes une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique. Caractériser alors ses vecteurs cycliques.

## II. Déterminant d'un endomorphisme, divers

**Ex. 23.13** On se place dans  $\mathbb{R}$ .

Déterminer le rang des systèmes suivants puis les résoudre :

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = a \\ x + y - 2z = b \\ x + y - 3z = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + t = 1 \\ x + z + t = 2 \\ y + z + t = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+a)x + y + z = 0 \\ x + (1+a)y + z = 0 \\ x + y + (1+a)z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ -x - y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

**Ex. 23.14** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  défini par

$$f(P) = (X + 1)^2 P'' + (X - 1)P' + P$$

$f$  est-il un automorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  ?