

# Analyse, matrices, espaces euclidiens, probabilités

L'usage d'une calculatrice est interdit.

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.*

*Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.*

## Exercices

### Exercice 1.

**CCP TSI** On définit la fonction  $f$  sur  $[1; +\infty[$  par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

Ce problème a pour but d'étudier certaines propriétés de la fonction  $f$ .

#### **PARTIE A - Calcul de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$**

- 1) Montrer que  $f(1) = \ln(2)$  puis que  $f(2) = 1 - \ln(2)$ .
- 2) Rappeler la formule de factorisation de  $a^n - b^n$  pour  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
En déduire que, pour  $t \in [0; 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$1 - (-t)^n = (1+t) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k$$

- 3) En déduire que, pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$f(n) = (-1)^{n-1} \ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

- 4) Écrire une fonction **Python** `fEntier(n)` qui prend en paramètre un entier `n` strictement positif et renvoie la valeur de  $f(n)$  calculée en utilisant la formule obtenue à la question précédente.

On supposera la fonction `log` (pour `ln`) importée de la bibliothèque `numpy`.

#### **PARTIE B - Variations de $f$**

- 5) Rappeler la définition de la décroissance d'une fonction  $g$  définie sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

- 6) Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels tels que  $0 \leq \alpha \leq \beta$ . Comparer pour  $t \in [0; 1]$  les valeurs de  $t^\alpha$  et de  $t^\beta$ .

En déduire que  $f$  est décroissante sur  $[1; +\infty[$ .

- 7) Montrer que, pour tout  $x \geq 1$  et tout  $t \in [0; 1]$  :

$$\frac{t^{x-1}}{2} \leq \frac{t^{x-1}}{1+t} \leq t^{x-1}$$

En déduire que, pour  $x \geq 1$  :

$$\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

- 8) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

- 9) Tracer l'allure de la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé.

On placera en particulier les points de cette courbe d'abscisses 1 et 2.

On donne  $\ln(2) \approx 0,7$ .

### **PARTIE C - Équivalent en $+\infty$**

- 10) Montrer que pour  $x \geq 1$  :

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$$

- 11) En utilisant la question 6), montrer que pour  $x \geq 2$  :

$$f(x) + f(x+1) \leq 2f(x) \leq f(x) + f(x-1)$$

- 12) En déduire un équivalent de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .

### **Exercice 2.**

#### **CCP PSI Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$**

On considère une particule se déplaçant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial  $t = 0$  est  $k = 0$ . À chaque instant  $t \in \mathbb{N}^*$ , elle se déplace aléatoirement de sa position  $k \in \mathbb{Z}$  à la position  $k + 1$  ou  $k - 1$ .

Soit  $p \in ]0; 1[$ . On définit sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$  une suite de variables aléatoires indépendantes  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$  dont la loi est définie par

$$\forall t \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X_t = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_t = -1) = 1 - p$$

Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{t=1}^n X_t$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $X_t$  modélise le déplacement de la particule à l'instant  $t$ . Si  $X_t = 1$ , elle se déplace vers la droite, si  $X_t = -1$ , elle se déplace vers la gauche. Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n$  modélise la position de la particule après  $n$  déplacements.

Enfin, on **admet** la formule de Stirling, donnant un équivalent de  $n!$  :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

### **PARTIE A - Un développement limité**

1) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Donner sans démonstration un développement limité de la fonction  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  à l'ordre  $n$  au voisinage de 0.

2) En déduire que  $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ .

*On admet par ailleurs que pour tout  $x \in ]-1; 1[$ ,*

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} x^k$$

### ***PARTIE B - Probabilité de retour à l'origine***

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$$

3) Pour tout  $t \in \mathbb{N}^*$ , déterminer la loi de la variable aléatoire  $\frac{X_t + 1}{2}$ .

En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $\sum_{t=1}^n \frac{X_t + 1}{2}$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

4) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \begin{cases} \binom{n}{n/2} (p(1-p))^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

5) Déterminer la limite de la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  selon les valeurs de  $p$  et interpréter ce résultat.

### ***PARTIE C - Nombre de passages par l'origine***

Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on note  $O_{2j}$  la variable aléatoire qui vaut 1 si la particule est à l'origine à l'instant  $t = 2j$  et qui vaut 0 sinon.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $T_n = \sum_{j=0}^n O_{2j}$ . Enfin on note  $\mathbb{E}(T_n)$  l'espérance de la variable aléatoire  $T_n$ .

On souhaite déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$ .

6) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Que modélise la variable aléatoire  $T_n$  ?

7) Soit  $j \in \mathbb{N}$ . Déterminer la loi de la variable aléatoire  $O_{2j}$ . En déduire que :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^n \binom{2j}{j} (p(1-p))^j$$

8) On suppose dans cette question que  $p \neq \frac{1}{2}$ . En utilisant le résultat admis à la question 2), calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$  et interpréter ce résultat.

9) On suppose dans cette question que  $p = \frac{1}{2}$ . Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$ .

### Exercice 3.

#### Mines-Ponts PC Polynômes réciproques

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $p$  est dit réciproque lorsqu'il satisfait l'égalité

$$P = X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$$

1) Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $p \in \mathbb{N}^*$ .

On écrit  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$  où  $a_0, a_1, \dots, a_p$  sont des nombres complexes, avec  $a_p \neq 0$ .

Montrer que  $P$  est réciproque si et seulement si

pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq p$ , on a l'égalité  $a_k = a_{p-k}$ .

2) Soit  $P$  un polynôme de degré  $p \in \mathbb{N}^*$  écrit sous forme factorisée  $P = a_p \prod_{k=1}^d (X - \lambda_k)^{m_k}$  où  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$  sont les racines complexes distinctes de  $P$  et  $m_1, m_2, \dots, m_d$  leurs multiplicités. Écrire sous forme factorisée  $X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$  et démontrer que si  $P$  est réciproque, alors pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq d$ ,  $\lambda_k$  est non nul et  $\frac{1}{\lambda_k}$  est racine de  $P$  de multiplicité  $m_k$ .

3) Soit  $Q$  un polynôme de degré  $p \in \mathbb{N}^*$ .

On dit que  $Q$  est *antiréciproque* si

$$Q = -X^p Q\left(\frac{1}{X}\right)$$

Montrer que si  $Q$  est antiréciproque alors 1 est racine de  $Q$  et qu'il existe un polynôme constant ou réciproque  $P$  tel que  $Q = (X - 1)P$ .

Soit  $R$  un polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  ayant la propriété suivante :

**Toute racine  $a$  de  $R$  est non nulle et  $\frac{1}{a}$  est racine de  $R$  de même multiplicité que  $a$ .**

4) Démontrer que le produit des racines de  $R$ , comptées avec multiplicité, vaut 1 ou -1.

**Indication** : on pourra remarquer que  $a = \frac{1}{a}$  a pour solutions 1 et -1.

5) En déduire que  $R$  est réciproque ou antiréciproque.