

# Correction DS n°7

## Exercice 1.

### *PARTIE A - Calcul de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$*

$$1) f(1) = \int_0^1 \frac{t^0}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$$

$$f(2) = \int_0^1 \frac{t^1}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t+1-1}{1+t} dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t} dt$$

$$\text{Donc } f(2) = [t - \ln(1+t)]_0^1 = 1 - \ln(2).$$

2) Soit  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

Soit  $t \in [0; 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  : en posant  $a = 1$  et  $b = -t$  dans la formule précédente, on a donc

$$1 - (-t)^n = 1^n - (-t)^n = (1 - (-t)) \sum_{k=0}^{n-1} 1^{n-1-k} (-t)^k = (1+t) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k$$

3) Soit  $n$  un entier tel que  $n \geq 2$  :

$$\begin{aligned} f(n) &= \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{n-1} - (-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{n-1} - (-1)^{n-1}}{1+t} + \frac{(-1)^{n-1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 (-1)^n \frac{1 - (-t)^{n-1}}{1+t} dt + (-1)^{n-1} [\ln(1+t)]_0^1 \\ &= \int_0^1 (-1)^n \frac{(1+t) \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k t^k}{1+t} dt + (-1)^{n-1} \ln(2) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= \left[ (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 + (-1)^{n-1} \ln(2) \\ &= (-1)^{n-1} \ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k+1} \end{aligned}$$

4) Par exemple :

```
def fEntier(n):
    res = (-1)**(n-1)*log(2)
    u = (-1)**n
    for k in range(n-1):
        res += u/(k+1)
        u *= -1
    return res
```

**PARTIE B - Variations de  $f$**

5)  $g$ , définie sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , est décroissante si et seulement si

$$\forall x \in I, \forall y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

6) Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels tels que  $0 \leq \alpha \leq \beta$ . Si  $t = 0$ , en posant  $0^0 = 0$ , on a bien  $0^\alpha = 0 = 0^\beta$  donc  $t^\alpha \geq t^\beta$ .

Sinon,  $t \in ]0; 1]$ , donc  $\ln(t) \leq 0$ .

Comme  $0 \leq \alpha \leq \beta$ , en multipliant par  $\ln(t)$ , on a :

$$0 \geq \alpha \ln(t) \geq \beta \ln(t).$$

Comme par ailleurs  $\exp$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , on obtient :

$$1 \geq t^\alpha \geq t^\beta.$$

Soit  $x \in [1; +\infty[$  et  $y \in [1; +\infty[$ .

Supposons  $x \leq y$ , c'est-à-dire  $0 \leq x - 1 \leq y - 1$ .

D'après ce qui précède,  $\forall t \in [0; 1], t^{y-1} \leq t^{x-1} \leq 1$ .

Comme  $1 + t > 0$ , on a aussi  $\frac{t^{y-1}}{1+t} \leq \frac{t^{x-1}}{1+t} \leq \frac{1}{1+t}$ .

Enfin, par croissance de l'intégrale,  $f(y) \leq f(x) \leq \ln(2)$ .

Donc  $f$  est décroissante et majorée par  $f(1) = \ln(2)$ .

7) Soit  $x \geq 1$  et  $t \in [0; 1]$  : on a donc

$1 \leq 1 + t \leq 2$ , et comme  $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x}$  est décroissante, on en déduit

$$1 \geq \frac{1}{1+t} \geq \frac{1}{2}.$$

Enfin, comme  $t^{x-1} \geq 0$ , on conclut que

$$\frac{t^{x-1}}{2} \leq \frac{t^{x-1}}{1+t} \leq t^{x-1}$$

En intégrant cet encadrement sur l'intervalle  $t \in [0; 1]$ , on obtient alors, pour tout  $x \geq 1$

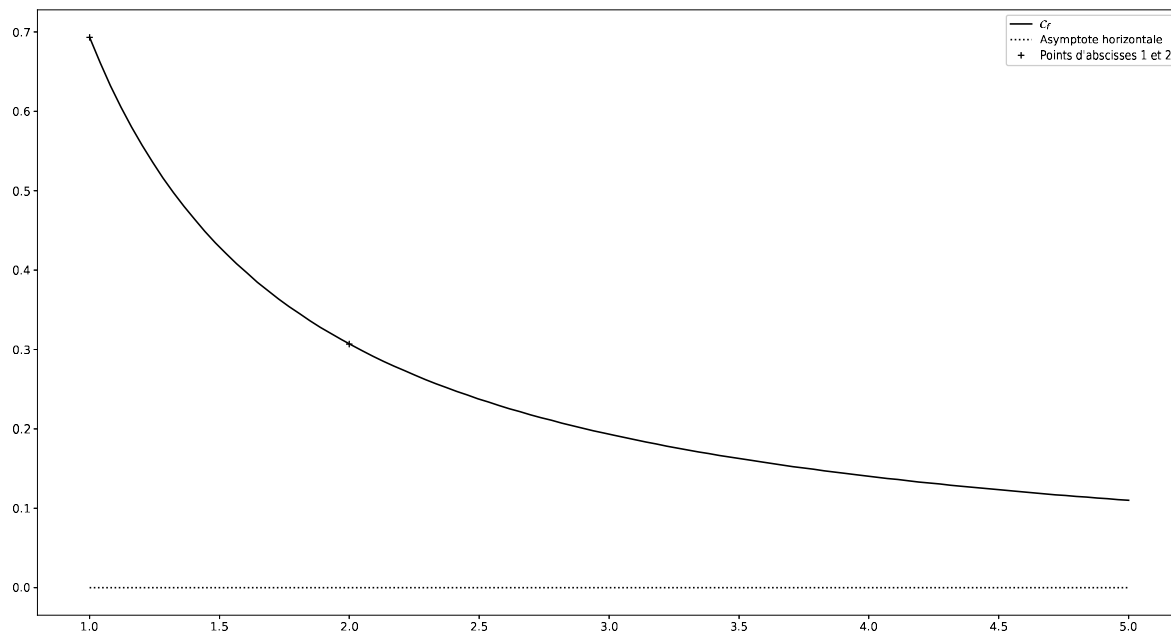
$$\left[ \frac{t^x}{2x} \right]_0^1 \leq f(x) \leq \left[ \frac{t^x}{x} \right]_0^1$$

c'est-à-dire  $\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$ .

8) En utilisant le théorème des gendarmes sur l'encadrement précédent pour  $x \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

9)



### ***PARTIE C - Équivalent en $+\infty$***

10) Soit  $x \geq 1$  :

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}(1+t)}{1+t} dt$$

$$\text{Donc } f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \left[ \frac{t^x}{x} \right]_0^1 = \frac{1}{x}$$

11) Soit  $x \geq 2$  :

on a donc  $x+1 \geq x \geq x-1 \geq 1$  d'une part et, comme  $f$  est décroissante,  $f(x+1) \leq f(x) \leq f(x-1)$ .

Enfin, en ajoutant  $f(x)$  aux 3 membres de cet encadrement, on a bien :

$$f(x) + f(x+1) \leq 2f(x) \leq f(x) + f(x-1)$$

12) D'après les deux questions précédentes, pour tout  $x \geq 2$  :

$$\frac{1}{x} \leq 2f(x) \leq \frac{1}{x-1}$$

En multipliant par  $x$  l'encadrement, on obtient :

$$1 \leq \frac{f(x)}{\frac{1}{2x}} \leq \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{2x}} = 1$ .

Donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

### **Exercice 2.**

#### ***PARTIE A - Un développement limité***

1) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\text{avec } \binom{\alpha}{0} = 1 \text{ et, pour } k \in \mathbb{N}^*, \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

2) On en déduit que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^n \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x)^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\text{avec, pour } k \in \mathbb{N}^*, \binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k \times 1 \times 3 \times \dots \times (2k-1)}{2^k k!}.$$

En multipliant et divisant par  $2^k \times k!$  cette dernière expression, on obtient donc :

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^k \times 1 \times 3 \times \dots \times (2k-1) \times 2 \times 4 \times \dots \times (2k)}{2^{2k} (k!)^2} = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \binom{2k}{k}.$$

$$\text{Donc } \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \binom{2k}{k} (-1)^k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \text{ ou encore}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

### **PARTIE B - Probabilité de retour à l'origine**

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$$

3) Pour tout  $t \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(X_t = 1) = p$  et  $\mathbb{P}(X_t = -1) = 1 - p$ .

$$\text{Donc } \mathbb{P}\left(\frac{X_t+1}{2} = 1\right) = p \text{ et } \mathbb{P}\left(\frac{X_t+1}{2} = 0\right) = 1 - p.$$

$$\text{Donc } \frac{X_t+1}{2} \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \text{ (loi de Bernoulli de paramètre } p\text{)}.$$

Les variables aléatoires  $X_t$  ( $t \in \mathbb{N}^*$ ) étant par ailleurs indépendantes, on en déduit que la variable aléatoire  $\sum_{t=1}^n \frac{X_t+1}{2}$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ .

4) On déduit de la question précédente que  $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}\left(\sum_{t=1}^n \frac{X_t+1}{2} = k\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ .

Or l'événement  $\left(\sum_{t=1}^n \frac{X_t+1}{2} = k\right)$  s'écrit aussi  $\left(\sum_{t=1}^n X_t = 2k - n\right)$ , c'est-à-dire  $(S_n = 2k - n)$ .

Pour que  $(S_n = 0)$  soit satisfait, il faut et il suffit donc que  $k = \frac{n}{2}$  et que  $n$  soit pair (puisque  $k$  est entier).

$$\text{Donc } n \in \mathbb{N}^*, u_n = \begin{cases} \binom{n}{n/2} (p(1-p))^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned}
u_{2n} &= \binom{2n}{n} [p(1-p)]^n \\
&= \frac{(2n)! [p(1-p)]^n}{(n!)^2} \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} [p(1-p)]^n}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n} [p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}}
\end{aligned}$$

Or  $p \in [0; 1]$  et la fonction  $h : x \in [0; 1] \mapsto x(1-x)$ , de dérivée  $h'(x) = 1 - 2x$  passe par son maximum  $\frac{1}{4}$  pour  $x = \frac{1}{2}$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [0; 1], 0 \leq \frac{2^{2n} [p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ .

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n} [p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}} = 0$$

La probabilité que la particule revienne à l'origine tend donc vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### **PARTIE C - Nombre de passages par l'origine**

Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on note  $O_{2j}$  la variable aléatoire qui vaut 1 si la particule est à l'origine à l'instant  $t = 2j$  et qui vaut 0 sinon.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $T_n = \sum_{j=0}^n O_{2j}$ . Enfin on note  $\mathbb{E}(T_n)$  l'espérance de la variable aléatoire  $T_n$ .

On souhaite déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$ .

6) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La variable aléatoire  $T_n$  représente le nombre de fois où la particule est repassée par l'origine depuis le début de la marche aléatoire, départ de l'origine inclus. Notamment  $T_n \geq 1$ .

7) Soit  $j \in \mathbb{N}$ .

$O_{2j}(\Omega) = \{0; 1\}$  et  $\mathbb{P}(O_{2j} = 1) = u_{2j}$  par définition de la variable aléatoire  $O_{2j}$  (ce qui suffit à définir la variable aléatoire  $O_{2j}$  et à donner sa loi).

$$\text{Donc } \mathbb{P}(O_{2j} = 1) = \binom{2j}{j} [p(1-p)]^j.$$

$$\text{Notamment } \mathbb{E}(O_{2j}) = 0 \times \mathbb{P}(O_{2j} = 0) + 1 \times \mathbb{P}(O_{2j} = 1) = \binom{2j}{j} [p(1-p)]^j.$$

$$\text{Donc } \mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^n O_{2j}\right) = \sum_{j=0}^n \mathbb{E}(O_{2j}) \text{ par linéarité de l'espérance}$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^n \binom{2j}{j} [p(1-p)]^j$$

8) On suppose dans cette question que  $p \neq \frac{1}{2}$ .

Comme on l'a vu à la question B-5),  $p(1-p) < \frac{1}{4}$ . En posant  $x = 4p(1-p) < 1$ , on peut donc écrire

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^{2j}} \binom{2j}{j} x^j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \text{ d'après le résultat admis à la question A-2).}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{\sqrt{1-4p+4p^2}} = \frac{1}{|2p-1|}.$$

En moyenne, la particule passe donc  $\frac{1}{|2p-1|}$  fois par l'origine (départ à l'origine inclus).

9) On suppose dans cette question que  $p = \frac{1}{2}$ .

$$\text{On a donc } \mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^n \binom{2j}{j} \frac{1}{4^j}.$$

$$\text{Montrons par récurrence que : } \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

**Initialisation** : pour  $n = 0$

$$\mathbb{E}(T_0) = 1 \text{ (on part de l'origine)}$$

$$\text{et } \frac{2 \times 0 + 1}{2^0} \binom{0}{0} = 1.$$

La propriété est initialisée.

**Hérédité** :

$$\text{Supposons que pour un entier } n \in \mathbb{N} \text{ donné, on ait } \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_{n+1}) &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{2j}{j} \frac{1}{4^j} \\ &= \binom{2n+2}{n+1} \frac{1}{4^{n+1}} + \sum_{j=0}^n \binom{2j}{j} \frac{1}{4^j} \\ &= \binom{2n+2}{n+1} \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \quad \text{(définition des coef.binomiaux)} \\ &= \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \left( \frac{(2n+2)}{4(n+1)^2} + 1 \right) \\ &= \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{2(n+1) + 4(n+1)^2}{4(n+1)^2} \\ &= \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{2(n+1)(1+2n+2)}{4(n+1)^2} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{2^{2(n+1)}(n+1)^2} \binom{2n}{n} \\ &= \frac{2n+3}{2^{2(n+1)}} \binom{2(n+1)}{n+1} \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

En reprenant les calculs de la question B-5), on a donc :

$$\mathbb{E}(T_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n+1}{\sqrt{\pi n}} \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n) = +\infty$$

### Exercice 3.

1) Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $p \in \mathbb{N}^*$ .

On écrit  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$  où  $a_0, a_1, \dots, a_p$  sont des nombres complexes, avec  $a_p \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 P \text{ est réciproque} &\Leftrightarrow P = X^p P\left(\frac{1}{X}\right) \\
 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^p a_k X^k = X^p \sum_{k=0}^p a_k X^{-k} \\
 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^p a_k X^k = \sum_{k=0}^p a_k X^{p-k} \\
 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^p a_k X^k = \sum_{j=0}^p a_{p-j} X^j \quad \text{en posant } j = p - k \\
 &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0 : p \rrbracket, a_k = a_{p-k}
 \end{aligned}$$

car deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux.

2) Soit  $P$  un polynôme de degré  $p \in \mathbb{N}^*$  écrit sous forme factorisée  $P = a_p \prod_{k=1}^d (X - \lambda_k)^{m_k}$  où  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$  sont les racines complexes distinctes de  $P$  et  $m_1, m_2, \dots, m_d$  leurs multiplicités. Pour commencer, d'après la question précédente, si  $P$  est réciproque alors  $a_0 = a_p \neq 0$  : donc 0 n'est pas racine de  $P$ .

D'autre part, en supposant que  $P$  est un polynôme réciproque :

$$\begin{aligned}
 X^p P\left(\frac{1}{X}\right) &= a_p X^p \prod_{k=1}^d \left(\frac{1}{X} - \lambda_k\right)^{m_k} \\
 &= a_p \prod_{k=1}^d (1 - \lambda_k X)^{m_k} \quad \text{car la somme des multiplicités vaut } p \\
 &= a_p \left(\prod_{k=1}^d \lambda_k^{m_k}\right) \prod_{k=1}^d \left(\frac{1}{\lambda_k} - X\right)^{m_k} \quad \text{car } \forall k, \lambda_k \neq 0 \\
 &= (-1)^p a_p \left(\prod_{k=1}^d \lambda_k^{m_k}\right) \prod_{k=1}^d \left(X - \frac{1}{\lambda_k}\right)^{m_k} \\
 &= P \quad \text{car } P \text{ est réciproque}
 \end{aligned}$$

Donc, si  $P$  est réciproque, alors  $(-1)^p \left(\prod_{k=1}^d \lambda_k^{m_k}\right) = 1$ , les racines  $\lambda_k$  de  $P$  sont non nulles

et enfin, pour toute racine  $\lambda_k$  de  $P$ ,  $\frac{1}{\lambda_k}$  est aussi racine de  $P$ , de même multiplicité que  $\lambda_k$ .

3) Soit  $Q$  un polynôme de degré  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Supposons  $Q$  antiréciproque.

On a donc  $Q = -X^p Q\left(\frac{1}{X}\right)$ .

En évaluant en 1, on obtient  $Q(1) = -Q(1)$ , donc  $Q(1) = 0$  : 1 est donc une racine de  $Q$ .

Donc  $X - 1$  divise  $Q$ , et il existe donc un polynôme  $P$  de degré  $p - 1 \in \mathbb{N}$  tel que

$$Q = (X - 1)P.$$

Comme  $Q$  est antiréciproque,  $P$  vérifie par ailleurs  $(X - 1)P = -X^p \left(\frac{1}{X} - 1\right) P\left(\frac{1}{X}\right)$ .

$$\text{Donc } (X - 1)P = -X^{p-1}(1 - X)P\left(\frac{1}{X}\right).$$

Et, après division par  $X - 1$ , :  $P = X^{p-1}P\left(\frac{1}{X}\right)$ .

Donc soit  $P$  est constant (s'il est de degré 0), soit  $P$  est un polynôme réciproque (si  $p-1 > 0$ ).

Soit  $R$  un polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  ayant la propriété suivante :

*Toute racine  $a$  de  $R$  est non nulle et  $\frac{1}{a}$  est racine de  $R$  de même multiplicité que  $a$ .*

- 4) Notons  $(\mu_k)_{k \in \llbracket 1; d \rrbracket}$  les racines (distinctes) de  $R$ , et pour chacune d'elles, notons  $m_k$  sa multiplicité.

Le produit des racines de  $R$  vaut :

$$u = \prod_{k=1}^d \mu_k^{m_k}$$

Mais comme, pour toute racine  $\mu_k$ ,  $\frac{1}{\mu_k}$  est racine de  $R$  de même multiplicité, le produit des racines de  $R$  vaut aussi

$$u = \prod_{k=1}^d \frac{1}{\mu_k^{m_k}} = \frac{1}{u}.$$

Donc  $u = 1$  ou  $u = -1$ .

- 5) Notons  $R = b_r \prod_{k=1}^d (X - \mu_k)^{m_k}$  où  $r \in \mathbb{N}^*$  est le degré de  $R$ .

En reprenant le calcul de la question 2), on a

$$X^r R\left(\frac{1}{X}\right) = (-1)^r b_r \left( \prod_{k=1}^d \mu_k^{m_k} \right) \prod_{k=1}^d \left( X - \frac{1}{\mu_k} \right)^{m_k}$$

donc  $X^r R\left(\frac{1}{X}\right) = (-1)^r b_r \times (\pm 1) \prod_{k=1}^d \left( X - \frac{1}{\mu_k} \right)^{m_k}$  d'après la question précédente.

Comme par ailleurs, pour toute racine  $a$  de  $R$ ,  $\frac{1}{a}$  est aussi racine de  $R$  de même multiplicité

que  $a$ , les produits  $\prod_{k=1}^d \left( X - \frac{1}{\mu_k} \right)^{m_k}$  et  $\prod_{k=1}^d (X - \mu_k)^{m_k}$  sont égaux.

Donc  $X^r R\left(\frac{1}{X}\right) = \pm (-1)^r R$ .

Enfin,  $R$  n'est pas constant, c'est donc un polynôme réciproque ou antiréciproque.