Maths - Feuille d'exos n° 24

Fin d'année

I. Intégration

Ex. 24.1 Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$.
2. Montrer que si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0$.
3. Montrer que si f est T-périodique, alors $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_b^{b+T} f(t)\mathrm{d}t$.

Ex. 24.2 Linéariser $\cos^3(x)$ et en déduire une primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$.

Ex. 24.3 Calculer : $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}(2-t)\mathrm{d}t \quad J = \int_0^3 |t-2|\mathrm{d}t$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(t)\mathrm{d}t \quad L = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad M = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+3}}$$

$$N = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} \quad P = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)} \quad Q = \int^x \sin^3(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t$$

$$R = \int^x \tan(t)\mathrm{d}t \quad S = \int^x t\,\mathrm{Arctan}(t)\mathrm{d}t \quad T = \int^x \ln^2(t)\mathrm{d}t$$

$$U = \int^x \mathrm{ch}^2(t)\mathrm{d}t \quad V = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-1)(3-t)}} \quad W = \int^x \frac{2-t}{(1-t)^2}\mathrm{d}t$$

$$X = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} \quad Y = \int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}t}{5\,\mathrm{ch}(t) - 4\,\mathrm{sh}(t)} \quad Z = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t) + \sin(2t)}$$

Ex. 24.4 Écrire $f(x) = \dfrac{x^3+2x+1}{x^3-x^2+x-1}$ sous la forme d'une somme et en déduire une primitive de f.

Ex. 24.5 Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos(nx)\mathrm{d}x$.

Ex. 24.6 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ I_{n+1} en fonction de I_n.
3. Calculer I_2, I_3 et I_4.
4. Montrer qu'il existe une suite d'entiers positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $I_n = (-1)^n (a_n e - n!)$.
5. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante positive.
6. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.
7. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a_n}$ et en déduire une approximation rationnelle de e à 10^{-3} près.

Ex. 24.7

1. Montrer que $F : x \in \mathbb{R} \mapsto F(x) = \displaystyle\int_0^x \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t$ est bien définie.
2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les expressions de F sur $[0;2]$.
4. Montrer que F n'est pas partout dérivable.

Ex. 24.8 (Cor.) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient

$$f'(t) - f(t) = e^t \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$$

Ex. 24.9 (Cor.) Résoudre l'équation différentielle $tf'(t) - f(t) + 3t^2 f(t)^2 = 0$ en donnant les intervalles sur lesquels la solution est valable.
[Indication : montrer d'abord que sur tout intervalle où f ne s'annule pas, $g(t) = \dfrac{t}{f(t)}$ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre.]

Ex. 24.10 Déterminer les limites des suites :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2} \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+n^2} \qquad y_n = \sum_{k=0}^{n^2} \frac{k}{k^2+n^2}$$

Ex. 24.11 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Démontrer le théorème de convergence des sommes de Riemann.
2. ***Méthode des rectangles***

   Majorer l'erreur commise en approximant $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par

   $$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{(2k+1)(b-a)}{2n}\right).$$
3. ***Méthode des trapèzes***

   Majorer l'erreur commise en approximant $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par

   $$T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) + f\left(a + (k+1)\frac{(b-a)}{n}\right)}{2}.$$

Corrections

Cor. 24.8 : **Analyse** : supposons qu'une telle fonction f existe. f est dérivable, donc continue, donc $f'(t)$ et $I = \displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$ sont bien définis. f est solution de l'équation différentielle $f' - f = I\exp$. Résolvons cette équation :
$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \lambda e^t + Ite^t$.
De plus, $I = \displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \lambda e^u + Iue^u \mathrm{d}u = \lambda(e-1) + Ie - I(e-1) \Rightarrow \lambda = 0$.
Donc $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = Ite^t$.
Synthèse : $\forall k \in \mathbb{R}$, la fonction $f_k : t \in \mathbb{R} \mapsto kte^t$ vérifie
$\forall t \in \mathbb{R}, f_k'(t) - f_k(t) = ke^t$ et $\displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = ke - k(e-1) = k$ donc les fonctions de cette forme sont les solutions recherchées.

Cor. 24.9 :

- Sur tout intervalle où f ne s'annule pas, on pose $g(t) = \dfrac{t}{f(t)}$, $g'(t) = \dfrac{f(t) - tf'(t)}{f(t)^2} = 3t^2$ donc $g(t) = \dfrac{t}{f(t)} = t^3 - k^3, k \in \mathbb{R}$.
- Sur tout intervalle où f ne s'annule pas, on a donc $f(t) = \dfrac{t}{t^3 - k^3}$.
- On suppose maintenant $k = 0$: $f(t) = \dfrac{t}{t^3} = \dfrac{1}{t^2}$ ne s'annule jamais et est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.
- On suppose $k \neq 0$: $f(t)$ s'annule en $t = 0$ et est définie sur chacun des trois intervalles de $\mathbb{R}\backslash\{0; k\}$. En 0, $f(t) = \dfrac{-t}{k^3} + o(t)$, elle est donc prolongeable en une fonction dérivable en 0 en prenant de part et d'autre de 0 la même constante d'intégration.
- Finalement les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $k \in \mathbb{R}, f_k(t) = \dfrac{t}{t^3 - k^3}$ définies sur $]-\infty; k[$ et $]k; +\infty[$.