

Intégration

Le théorème fondamental du calcul intégral vu au chapitre 4 (proposition 4.33) s'énonce ainsi :

Théorème 24.1 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction

$$F : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t)dt \end{cases}$$

est l'unique primitive de f s'annulant en a et toute primitive de f s'écrit $F + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Ce théorème peut paraître paradoxal dans la mesure où, jusqu'en classes préparatoires, l'intégrale est définie à l'aide de la notion de primitive.

Ce théorème au contraire garantit l'existence d'une primitive pour une fonction continue à l'aide de la notion d'intégrale. Pour comprendre le sens de cette affirmation, et comprendre notamment qu'il ne s'agit en rien d'un *cercle vicieux logique*, il faut donner une définition fondamentale et géométrique de l'intégrale d'une fonction, qui puisse notamment se généraliser à certaines fonctions n'admettant pas de primitives. C'est l'objet de ce chapitre.

Il convient donc, pour bien comprendre ce que nous allons faire, de distinguer d'emblée les notions de primitives et d'intégrales. Dans tout ce qui suit, on considèrera deux réels a, b et une fonction f définie sur le *segment* $[a; b]$:

- on dit que F est une *primitive* de f sur $[a; b]$ si F est *dérivable* sur $[a; b]$ et vérifie

$$\forall x \in [a; b], F'(x) = \frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

- on *souhaite définir la notion d'intégrale* de sorte à ce que $\int_a^b f(t)dt$ représente *l'aire géométrique comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$, $x = b$ et la représentation graphique de f* lorsque f est une fonction positive.

Quelles sont les propriétés que doit alors vérifier l'intégrale ?

La construction que nous allons donner de la notion d'intégrale est due à **Bernhard Riemann**¹ et est historiquement la première à avoir vu le jour. D'autres théories de l'intégration sont possibles, comme par exemple la théorie de **Henri Lebesgue**².

1. **Bernhard Riemann**(1826;1866), mathématicien allemand dont les travaux en géométrie ont contribué de façon majeure aux progrès des mathématiques. En théorie des nombres, il émit aussi une des plus célèbres conjectures encore non résolue, la *conjecture de Riemann*, portant sur la loi de répartition des nombres premiers.

2. **Henri Lebesgue**(1875-1941), mathématicien français, connu pour ses travaux dans le domaine de l'intégration et des probabilités.

I. Programme officiel

Intégration

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Fonctions en escaliers	
Subdivision d'un segment.	
Fonctions en escaliers, intégrale d'une fonction en escaliers.	
b) Intégrale d'une fonction continue sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a; b]$ à valeurs réelles.	Interprétation géométrique. Notations $\int_{[a;b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)dt$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.	Les élèves doivent savoir majorer et minorer des intégrales.
Inégalité triangulaire intégrale : $\left \int_{[a;b]} f \right \leq \int_{[a;b]} f $.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)dt$ au cas où $b \leq a$. Propriétés correspondantes.
L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.	
Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0.	
Intégrale d'une fonction T -périodique sur un intervalle d'amplitude T .	
c) Sommes de Riemann	
Si f est continue sur $[a; b]$, à valeurs dans \mathbb{R} , alors	Interprétation géométrique des sommes de Riemann. $\Leftrightarrow I$: méthode des rectangles, méthode des trapèzes.
$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)dt$	
d) Lien entre intégrales et primitives	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ pour f continue.	
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.	

e) Inégalité de Taylor-Lagrange	
Inégalité de Taylor-Lagrange.	
f) Extension au cas des fonctions à valeurs complexes	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans \mathbb{C} .	Définition au moyen des parties réelles et imaginaires.

II. Construction de l'intégrale

II.1. Définitions



Définition 24.2 (Subdivision)

On appelle *subdivision* de l'intervalle $[a; b]$ tout *sous-ensemble fini* de réels de $x_i \in [a; b]$ contenant a et b .
 On classe généralement les éléments d'une subdivision par ordre croissant : $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b$.



Définition 24.3 (Fonction en escalier)

Une fonction $\phi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *en escalier* s'il existe un entier $n \geq 2$, une subdivision $s = \{x_i \in [a; b], i \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$ de l'intervalle $[a; b]$ telle que ϕ *soit constante sur chacun des intervalles* $]x_i; x_{i+1}[$.
 On dit alors que la subdivision s est *adaptée* à ϕ .



Notation

On note $\mathcal{E}([a; b])$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur l'intervalle $[a; b]$.

Dans tout ce qui suit, on notera ϕ une fonction en escalier sur $[a; b]$,

$s = \{x_i \in [a; b], i \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$ une subdivision adaptée à ϕ et

$\alpha_i \in \mathbb{R}, i \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$ la valeur prise par ϕ sur l'intervalle $]x_i; x_{i+1}[$.

Ex. 24.1 La fonction partie entière est une fonction en escalier sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

Une subdivision adaptée est par exemple

Théorème 24.4

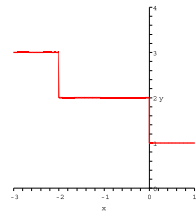
Toute combinaison linéaire de fonctions en escaliers est une fonction en escalier.

$(\mathcal{E}([a; b]), +, \cdot)$ est donc

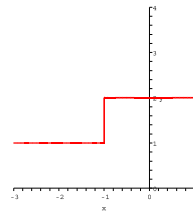
Démonstration

Ex. 24.2 Compléter le graphe de $\phi + \psi$

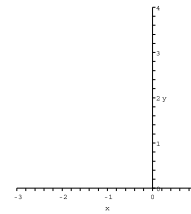
Graphe de ϕ



Graphe de ψ



Graphe de $\phi + \psi$

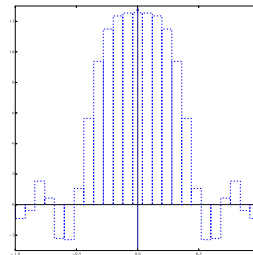


II.2. Intégrale d'une fonction en escalier



Définition 24.5

On appelle *intégrale de ϕ sur $[a; b]$* le réel $\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\alpha_i$.



Notation

On note cette intégrale $\int_a^b \phi(x)dx$ ou $\int_{[a;b]} \phi$ ou $\int_a^b \phi$.

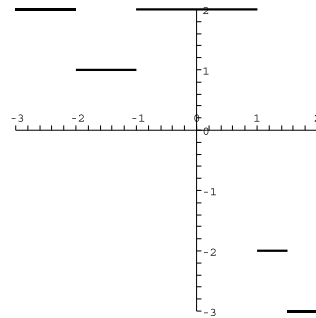


Remarque

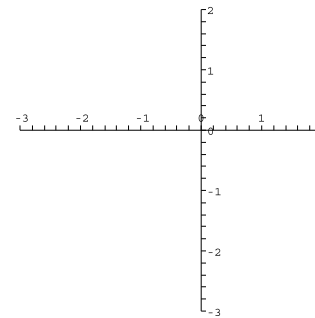
- 1) Une fonction constante égale à α sur l'intervalle $[a; b]$ est une fonction en escalier dont l'intégrale vaut $\int_{[a;b]} \alpha = (b - a)\alpha$.
- 2) L'intégrale ne dépend pas des valeurs prises par la fonction ϕ aux points de discontinuité.
- 3) Par définition, $\int_{[a;b]} \phi$ représente l'*aire algébrique* de la surface comprise entre la représentation graphique de ϕ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[a; b]$.

Ex. 24.3

Calculer l'intégrale sur $[-3; 2]$ de la fonction représentée ci-dessous.



Calculer l'intégrale sur $[-3; 2]$ de la fonction partie entière.



Propriété 24.6

ϕ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a; b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $c \in [a; b]$:

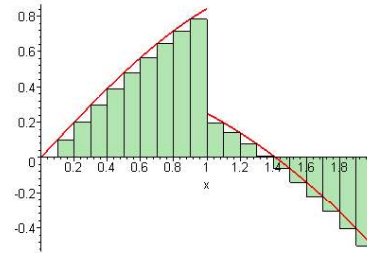
- **Linéarité** : $\int_{[a;b]} (\phi + \psi) = \int_{[a;b]} \phi + \int_{[a;b]} \psi$ et $\int_{[a;b]} \alpha \phi = \alpha \int_{[a;b]} \phi$.
- **Positivité** : si $\forall x \in [a; b], \phi(x) \geq 0$ alors $\int_{[a;b]} \phi \geq 0$.
- **Croissance** : si $\forall x \in [a; b], \phi(x) \geq \psi(x)$ alors $\int_{[a;b]} \phi \geq \int_{[a;b]} \psi$.
- **Relation de Chasles** : $\int_{[a;b]} \phi = \int_{[a;c]} \phi + \int_{[c;b]} \phi$.

Démonstration

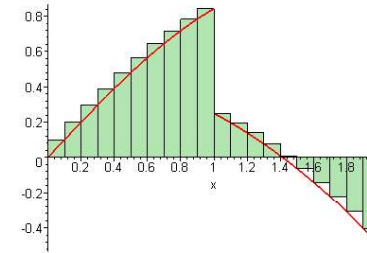
II.3. Intégrale d'une fonction continue

Théorème 24.7 (Approximation uniforme par des fonctions en escalier - Admis)

Pour toute fonction f continue sur $[a; b]$, il existe deux familles $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions en escaliers telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a; b], \begin{cases} \phi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x) \\ \psi_n(x) - \phi_n(x) \leq \frac{1}{n} \end{cases}$



ϕ_n et f



ψ_n et f

Théorème 24.8 (Convergence des intégrales)

Pour toute fonction f continue sur $[a; b]$, les suites des intégrales $I_n = \int_{[a;b]} \phi_n$ et $J_n = \int_{[a;b]} \psi_n$ convergent vers une même limite indépendante du choix des fonctions $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Cette limite s'appelle **intégrale de la fonction f sur $[a; b]$** et est notée $\int_{[a;b]} f = \int_a^b f(x)dx$. On a de façon évidente $\int_a^a f(x)dx = 0$ et on pose $\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$.

Démonstration hors programme

Soient deux familles $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions en escaliers telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a; b], \begin{cases} \phi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x) \\ \psi_n(x) - \phi_n(x) \leq \frac{1}{n} \end{cases}$. Pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a; b], \phi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_p(x)$ donc $I_n \leq J_p$. Donc $\{I_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie (non vide) majorée de \mathbb{R} et admet donc une borne supérieure I . De la même façon $\{J_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie de \mathbb{R} minorée par I_p pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et admet donc une borne inférieure J . Les majorations et minorations étant valables pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a de plus $I \leq J$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, \psi_n(x) - \phi_n(x) \leq \frac{1}{n} \Rightarrow J \leq J_n \leq I_n + \frac{1}{n} \leq I + \frac{1}{n}$. Donc

- $I \leq J \leq I + \frac{1}{n} \Rightarrow I = J$ par passage à la limite ;
- d'après le théorème des gendarmes, les suites $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers $I = J$.

 Un argument similaire montre que cette limite est indépendante du choix de $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Remarque

Nous venons de donner très rapidement les idées permettant de construire l'intégrale des fonctions continues.

Ce qu'il faut retenir c'est que

- la notion d'intégrale est construite de façon **géométrique**,
- s'interprète comme une aire algébrique et

• **ne fait jamais appel à la notion de primitive.** Ce dernier point est très important car nous verrons que dans certaines conditions, *c'est l'existence de l'intégrale qui garantira l'existence des primitives.*

II.4. Propriétés élémentaires

f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $c \in [a; b]$.

Théorème 24.9 (Linéarité de l'intégrale)

L'intégrale sur le segment $[a; b]$ est une forme linéaire du \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues :

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

Démonstration hors programme

Ces relations sont déjà démontrées pour les fonctions en escalier.

On suppose $a \leq b$. Soient $\phi_1 \leq f \leq \psi_1$ et $\phi_2 \leq g \leq \psi_2$ quatre fonctions en escalier.

$$\text{D'une part, } \int_{[a;b]} \phi_1 \leq \int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} \psi_1 \text{ et } \int_{[a;b]} \phi_2 \leq \int_{[a;b]} g \leq \int_{[a;b]} \psi_2.$$

$$\text{D'autre part, } \phi_1 + \phi_2 \leq f + g \leq \psi_1 + \psi_2 \Rightarrow \int_{[a;b]} (\phi_1 + \phi_2) \leq \int_{[a;b]} (f + g) \leq \int_{[a;b]} (\psi_1 + \psi_2).$$

Or pour les fonctions en escalier,

$$\int_{[a;b]} (\phi_1 + \phi_2) = \int_{[a;b]} \phi_1 + \int_{[a;b]} \phi_2 \text{ et } \int_{[a;b]} (\psi_1 + \psi_2) = \int_{[a;b]} \psi_1 + \int_{[a;b]} \psi_2.$$

Donc $\int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g$ et $\int_{[a;b]} (f + g)$ appartiennent à un même intervalle dont l'amplitude tend vers 0 lorsque la qualité de l'approximation s'améliore. Après passage à la limite, on obtient donc l'égalité souhaitée.

Si $a > b$, on écrit

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = - \int_b^a (f(x) + g(x)) dx = - \int_b^a f(x) dx - \int_b^a g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Théorème 24.10 (Positivité et croissance)

Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$ alors $\int_{[a;b]} f = \int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Démonstration hors programme

On a $f \geq 0$. Or la fonction nulle est une fonction en escalier d'intégrale nulle et l'intégrale de f est d'après le théorème de convergence des intégrales la borne supérieure des intégrales de

fonctions en escalier qui la minore : donc $\int_{[a;b]} f \geq 0$.

Corollaire 24.11

Si $f \geq g$ sur $[a; b]$ alors $\int_{[a;b]} f \geq \int_{[a;b]} g$.

Démonstration**Corollaire 24.12**

$$\left| \int_{[a;b]} f \right| \leq \int_{[a;b]} |f|$$

Démonstration**Théorème 24.13 (Relation de Chasles)**

Si f est continue sur I et si $(a; b; c) \in I^3$ (quel que soit leur ordre) alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Démonstration hors programme

Lorsque $a \leq c \leq b$, on utilise un raisonnement similaire à celui donné dans la démonstration de la linéarité de l'intégrale. Dans les autres cas, par exemple lorsque $c \leq b \leq a$, on écrit

$$\begin{aligned} \int_c^a f(x) dx &= \int_c^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx \Rightarrow - \int_b^a f(x) dx = - \int_c^a f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ \Rightarrow \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Théorème 24.14 (Inégalité de la moyenne)

Si $b > a$, $\min_{[a;b]} f \leq \frac{\int_{[a;b]} f}{b-a} \leq \max_{[a;b]} f$

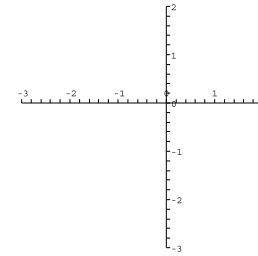
Démonstration



Définition 24.15 (Valeur moyenne)

On appelle *valeur moyenne* de f sur $[a; b]$ le nombre

$$\frac{\int_{[a;b]} f}{b-a}.$$



Remarque

L'inégalité de la moyenne peut se réécrire

.....

II.5. Théorèmes

Théorème 24.16

Si f est continue sur $[a; b]$ alors $\exists c \in [a; b], f(c) = \frac{\int_{[a;b]} f}{b-a}$

Démonstration

Théorème 24.17 (Intégrale d'une fonction continue positive)

Pour une fonction f continue positive, l'intégrale de f sur un segment est nulle si et seulement si f est la fonction nulle.

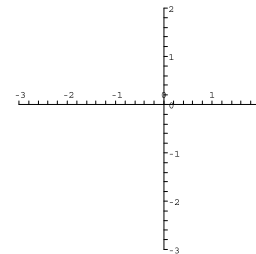
Autrement dit, $\forall f \in C^0([a; b]; \mathbb{R}_+), \int_{[a;b]} f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a; b], f(x) = 0.$

Démonstration

La réciproque est évidente. Pour le sens direct, on démontre la contraposée :

pour une fonction f continue positive, si

.....



III. Primitives d'une fonction

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}.$

III.1. Définition



Définition 24.18

On dit que $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est *une primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

III.2. Première propriété

Théorème 24.19

Si $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue alors

- toute primitive de f s'écrit $F + k, k \in \mathbb{R}$;
- quels que soient $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive G de f telle que $G(a) = b$.

Démonstration

III.3. Primitives d'une fonction continue

Théorème 24.20 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Si f une fonction continue sur I et $a \in I$ alors la fonction $F : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t)dt \end{cases}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et est l'unique primitive de f s'annulant en a .

Démonstration

Corollaire 24.21

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.



Notation

Pour f continue sur I , on note $x \in I \mapsto \int_a^x f(t)dt$ toute primitive de f sur I .

III.4. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Nous venons de voir que la notion d'intégrale garantit l'existence de primitives pour une fonction continue. Réciproquement, le théorème suivant permet de calculer simplement l'intégrale d'une fonction continue dont on connaît une primitive.

Théorème 24.22

Si f est continue sur $[a; b]$ alors elle admet une infinité de primitives sur $[a; b]$, et quelle que soit la primitive F choisie on a $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Démonstration **Notation**

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$$

Corollaire 24.23

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur I , alors $\forall (a; x) \in I^2$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$.

IV. Calcul pratique des primitives**IV.1. Résumé**

Nous disposons à présent de la notion d'intégrale d'une fonction (continue) sur un intervalle permettant de formaliser la notion d'*aire algébrique*. Cette notion a été construite sur la base d'intuitions géométriques, *sans aucun recours à la notion de primitive*.

Nous avons par ailleurs démontré que pour les fonctions continues sur un segment, la notion d'intégrale garantit l'*existence d'une primitive* et que la connaissance d'une primitive permet *le calcul d'une intégrale*.

Nous pouvons désormais nous intéresser à l'autre problème du calcul différentiel : comment obtenir *l'expression d'une primitive lorsque c'est possible...*

Ce problème est de type calculatoire : nous allons donner dans ce paragraphe quelques astuces de calcul des primitives en commençant par des rappels du chapitre 8.

IV.2. Intégration par partie**Théorème 24.24**

Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I et $(a; b) \in I^2$. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Démonstration

Ce théorème a été démontré au chapitre 8, proposition 8.3.

Remarque

La technique de l'intégration par partie permet d'obtenir les primitives de $x \in]0; +\infty[\mapsto \ln x$. Ce sont les fonctions de la forme

IV.3. Changement de variable

Théorème 24.25

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $\phi \in \mathcal{C}^1([a; b])$. Alors

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)du = \int_a^b f \circ \phi(t)\phi'(t)dt$$

Démonstration

Ce théorème a été démontré au chapitre 8, proposition 8.4.

Ex. 24.4 (Cor.) Calculer $I_1(x) = \int \frac{\text{sh } t}{1 + \text{ch } t} dt$

et $I_2(x) = \int \sqrt{1 + t^2} dt$

IV.4. Quelques astuces de calcul

Intégration par partie et changement de variable dans une intégrale sont les deux *outils fondamentaux du calcul de primitives et d'intégrales*. Les méthodes et résultats des chapitres 4, 7 et 8 sont par ailleurs à connaître *par cœur* ! Notamment, on révisera le tableau des primitives usuelles.

On pourra aussi penser aux astuces suivantes :

- dans une intégrale dépendant d'un paramètre entier, une intégration par partie peut permettre d'obtenir une relation de récurrence ;
- lorsqu'on cherche un équivalent d'une intégrale, une intégration par partie peut là encore être utile ;
- *linéariser les polynômes trigonométriques* à l'aide des formules d'Euler ;
- *décomposer les fractions rationnelles en éléments simples* (voir exercice 24.6) ;
- exprimer $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ puis effectuer un changement de variable ;
- exprimer $\text{ch}(x)$, $\text{sh}(x)$ et $\text{th}(x)$ en fonction de $u = e^x$ puis effectuer un changement de variable.

Ex. 24.5 (Cor.) Montrer que $\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}$.

Ex. 24.6 (Cor.) Calculer $J = \int \frac{t^2 + 1}{(t - 1)(t^2 + 2t + 5)} dt$

IV.5. Règles de Bioche

Enfin, dans le cas de fonctions ne dépendant que d'expressions trigonométriques **ou** ne dépendant que d'expressions hyperboliques, la méthode suivante est très intéressante :



Méthode : Règles de Bioche

Dans une intégrale de la forme $\int_a^b f(\cos(t), \sin(t), \tan(t))dt$:

- si $t \leftrightarrow -t$ laisse $f(\cos(t), \sin(t), \tan(t))dt$ invariante, le changement de variable $u = \cos(t)$ peut s'avérer intéressant ;
- si $t \leftrightarrow \pi - t$ laisse $f(\cos(t), \sin(t), \tan(t))dt$ invariante, le changement de variable $u = \sin(t)$ peut s'avérer intéressant ;
- si $t \leftrightarrow \pi + t$ laisse $f(\cos(t), \sin(t), \tan(t))dt$ invariante, le changement de variable $u = \tan(t)$ peut s'avérer intéressant.

Dans le cas d'intégrales de fonctions hyperboliques, les mêmes règles s'appliquent en remplaçant \cos par ch , etc. . .

Ex. 24.7 (Cor.) Calculer des primitives de

$$f : x \mapsto \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$$

en indiquant l'ensemble de validité des primitives obtenues.

V. Compléments

V.1. Sommes de Riemann

Théorème 24.26

Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

Démonstration hors programme

Ce théorème sera démontré en exercices.

Géométriquement, il s'agit simplement de l'approximation de la fonction f par des fonctions en escalier de pas constant égal à $\frac{b-a}{n}$.



Méthode

Ce théorème peut servir :

- pour calculer une intégrale;
- pour déterminer la limite d'une somme.

Ex. 24.8 (Cor.) Calculer la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ de

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n+k}.$$

VI. Correction des exercices

Cor. 24.4 : On pose $u = \operatorname{ch} t$, $du = \operatorname{sh} t dt$ d'où

$$I_1(x) = \int^{\operatorname{ch} x} \frac{1}{1+u} du = \ln(1 + \operatorname{ch} x).$$

Pour simplifier la racine carrée on pense à la formule $\operatorname{ch}^2 v = 1 + \operatorname{sh}^2 v$. On pose $t = \operatorname{sh} v$, $dt = \operatorname{ch} v dv$.

Il faut aussi effectuer le changement de borne :

$\operatorname{sh} v = x \Leftrightarrow \frac{e^v - e^{-v}}{2} = x \Leftrightarrow (e^v)^2 - 2xe^v - 1 = 0$. Après calcul du discriminant et en remarquant que $\exp > 0$, on a donc $v = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. D'où :

$$I_2(x) = \int^{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})} \operatorname{ch}^2 v dv.$$

Il suffit alors de simplifier $\operatorname{ch}^2 v$ en utilisant sa définition :

$$\operatorname{ch}^2 v = \frac{e^{2v} + 2 + e^{-2v}}{4} = \frac{\operatorname{ch}(2v) + 1}{2} \text{ ce qui conduit à}$$

$$I_2(x) = \frac{\operatorname{sh}[2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})] + 2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{4}.$$

Cor. 24.5 : On intègre par partie :

$$\int_2^x 1 \times \frac{dt}{\ln t} = \left[\frac{t}{\ln t} \right]_2^x + \int_2^x \frac{t dt}{t \ln^2(t)} = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2(t)}$$

Montrons que la partie restant à intégrer est négligeable devant l'intégrale de départ quand $x \rightarrow +\infty$. En particulier, on suppose $x > 2$ et les deux intégrales sont des intégrales positives de fonctions positives.

Tout d'abord $\forall t > 1$, $\frac{\frac{1}{\ln^2(t)}}{\frac{1}{\ln(t)}} = \frac{1}{\ln t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $\forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, t > A \Rightarrow 0 < \frac{1}{\ln^2(t)} < \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{\ln(t)}$.

On découpe l'intégrale en deux morceaux pour $x > A$:

$$0 \leq \int_2^x \frac{dt}{\ln^2(t)} = \int_2^A \frac{dt}{\ln^2(t)} + \int_A^x \frac{dt}{\ln^2(t)} < \int_2^A \frac{dt}{\ln^2(t)} + \frac{\epsilon}{2} \int_A^x \frac{dt}{\ln(t)} \leq \int_2^A \frac{dt}{\ln^2(t)} + \frac{\epsilon}{2} \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$$

De plus, $\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} > \int_2^x \frac{dt}{t} = \ln x - \ln 2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\int_2^A \frac{dt}{\ln^2(t)}$ est finie et indépendante de x . Donc :

$\forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, x > B \Rightarrow \frac{\int_2^A \frac{dt}{\ln^2(t)}}{\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}} < \frac{\epsilon}{2}$. Donc

$\forall \epsilon > 0, \exists C = \max(A, B), x > C \Rightarrow 0 \leq \int_2^x \frac{dt}{\ln^2(t)} < \frac{\epsilon}{2} \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} + \frac{\epsilon}{2} \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} \leq \epsilon \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$ ce qui

signifie que

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln^2(t)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}\right)$$

On en conclut que $\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$.

Cor. 24.6 : Décomposons $R : t \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \frac{t^2 + 1}{(t-1)(t^2 + 2t + 5)}$ en éléments simples :

$R(t) = \frac{a}{t-1} + \frac{bt+c}{t^2+2t+5}$. On peut procéder soit par identification ou tenter d'être un peu plus astucieux :

$$(t-1)R(t) = a + \frac{(bt+c)(t-1)}{t^2+2t+5} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1 = a + b \text{ et}$$

$$(t-1)R(t) = a + \frac{(bt+c)(t-1)}{t^2+2t+5} \xrightarrow{t \rightarrow 1} \frac{1}{4} = a \text{ donc } b = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Enfin } R(0) = \frac{-1}{5} = -a + \frac{c}{5} \text{ donc } c = \frac{1}{4}.$$

Calculons maintenant $4J$:

$$4J = \int \frac{1}{t-1} + \frac{3t+1}{t^2+2t+5} dt = \ln|x-1| + \int \frac{3t+3-2}{t^2+2t+5} dt.$$

$$\text{La seconde intégrale se décompose en } K = \frac{3}{2} \int \frac{2t+2}{t^2+2t+5} dt - 2 \int \frac{1}{t^2+2t+5} dt.$$

Le premier terme est la primitive d'une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$, le second se réduit en passant par la forme canonique :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t^2+2t+5} dt &= \int \frac{1}{(t+1)^2+4} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2+1} du \\ &= \frac{\text{Arctan}\left(\frac{t+1}{2}\right)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } J = \frac{\ln|x-1|}{4} + \frac{3 \ln(x^2+2x+5)}{8} - \frac{\text{Arctan}\left(\frac{x+1}{2}\right)}{2}.$$

Cor. 24.7 : Première méthode :

$\frac{\cos(\pi+x)d(\pi+x)}{\cos(\pi+x)+\sin(\pi+x)} = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}$. Posons donc $u = \tan t$ par application des règles de

Bioche. On a $du = (1 + \tan^2 t)dt = (1 + u^2)dt$ et

$$I(x) = \int \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt = \int \frac{du}{(1+u)(1+u^2)}.$$

En décomposant en éléments simples on obtient $\frac{1}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1-u}{1+u^2} \right)$.

D'où $I(x) = \frac{1}{2} (\ln(1 + \tan x) + \text{Arctan}(\tan x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \tan^2 x))$.

Soit après simplifications : $I(x) = \frac{1}{2} (\ln(\cos x + \sin x) + x)$ valable sur tout intervalle de la forme $]\frac{-\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi[$.

Pour la seconde intégrale, il suffit de remarquer que $\frac{\cos x}{\cos x + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} = 1$ pour conclure que

$$\int \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt = \frac{1}{2} (x - \ln(\cos x + \sin x)).$$

Deuxième méthode :

On remarque que les primitives de $f + g$ et $f - g$ sont simples à calculer puis on revient à celles

de f et g .

Cor. 24.8 : On reconnaît une forme ressemblant à une somme de Riemann. En effet :

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2.$$

Or $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc u_n converge vers $\ln 2$.