

Trigonométrie

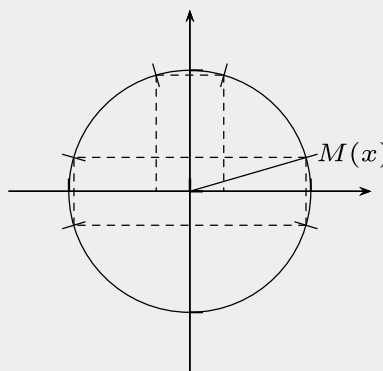
I. Rappels

I.1. Définition, Angles associés

On suppose connue la définition des fonctions trigonométriques à l'aide du cercle trigonométrique dont on déduit immédiatement :

Propriété 1.1

$$\begin{array}{ll}
 \forall x \in \mathbb{R}, & \\
 -1 \leq \cos(x) \leq 1 & -1 \leq \sin(x) \leq 1 \\
 \cos(x + 2\pi) = \cos(x) & \sin(x + 2\pi) = \sin(x) \\
 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \\
 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) \\
 \cos(\pi - x) = -\cos(x) & \sin(\pi - x) = \sin(x) \\
 \cos(\pi + x) = -\cos(x) & \sin(\pi + x) = -\sin(x) \\
 \cos(-x) = \cos(x) & \sin(-x) = -\sin(x) \\
 \cos(x) = \cos(x_0) \Leftrightarrow \dots\dots\dots & \\
 \sin(x) = \sin(x_0) \Leftrightarrow \dots\dots\dots & \\
 \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 & \text{par le théorème de Pythagore.}
 \end{array}$$



Ex. 1.1 Donner la valeur exacte de

$$A = \cos\left(\frac{588\pi}{3}\right) \quad B = \sin\left(\frac{-89\pi}{6}\right) \quad C = \cos\left(\frac{105\pi}{4}\right) \quad D = \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$



Définition 1.2 (Fonction tangente)

La fonction tangente est définie par $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.
 Son domaine de définition est $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 L'application $\tan$ est impaire, π -périodique.

Ex. 1.2 Soit x un réel tel que $\cos(x) = \frac{3}{5}$.

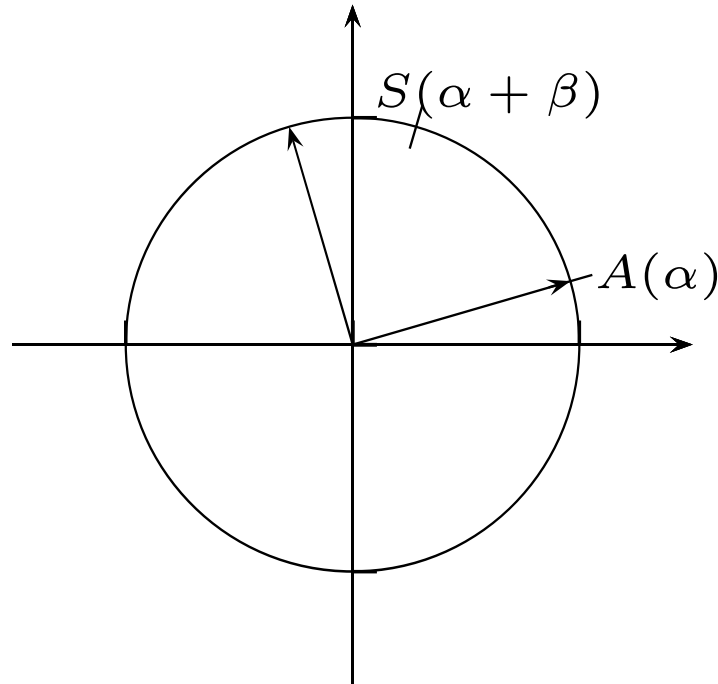
- 1) Dessiner le cercle trigonométrique et placer sur ce dessin $\cos(x)$ et les positions possibles des points du cercle associés à l'angle x .
- 2) Donner la valeur de $\cos(\pi + x)$, $\cos(x - \pi)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$.
- 3) **Dans cette question**, on suppose que $x \in]-\pi; 0]$: calculer $\sin(x)$ et $\tan(x)$.
- 4) **Dans cette question**, on suppose que $x \in]0; \pi]$: calculer $\sin(x)$ et $\tan(x)$.

I.2. Formules d'addition

Propriété 1.3 (Formules d'addition)

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$	$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$

Démonstration hors programme

Ex. 1.3 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :

$$(E_1) : \cos(2x) + \cos(x) = 0 \quad (E_2) : \tan(x) = 2 \sin(x)$$

Corollaire 1.4 (Formules d'addition de la fonction $\tan$)

Lorsque ces expressions sont définies,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

Démonstration**Corollaire 1.5 (Formules de duplication)**

Lorsque ces expressions sont définies,

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x) \\ \sin(2x) &= 2 \sin(x) \cos(x) \quad \tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)} \end{aligned}$$

Démonstration

Ex. 1.4 Soit $f : \begin{cases} I \rightarrow J \\ x \mapsto \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \end{cases}$.

- 1) Quel est l'ensemble de définition I de f ?
- 2) Justifier que, pour tout réel x dans I , il existe un unique réel $t \in [0; \pi]$ tel que $x = \cos(t)$.
Cet unique réel t est noté $\text{Arccos}(x)$.
- 3) Montrer que $f(\cos(t)) = \sqrt{2} \left(\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right)$.
- 4) En déduire que

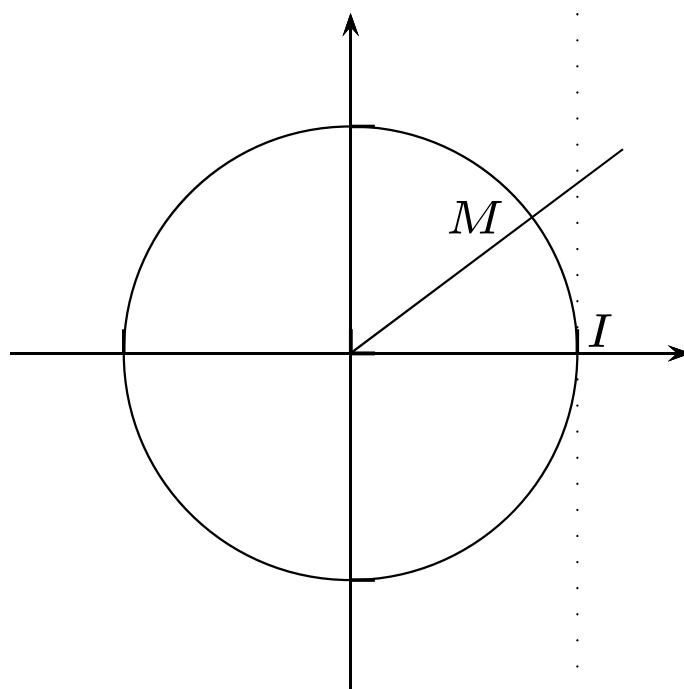
$$\forall x \in I, f(x) = 2 \cos\left(\frac{\text{Arccos}(x)}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

I.3. Dérivées des fonctions trigonométriques

Lemme 1.6 (Nombre dérivé de sin en 0)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Démonstration hors programme



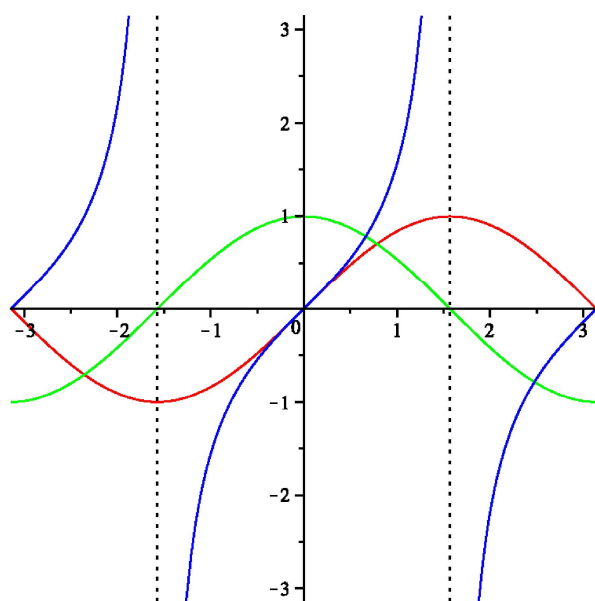
Propriété 1.7 (Fonctions dérivées de cos, sin et tan)

Les fonctions cos, sin et tan sont dérivables sur leur ensemble de définition et sur ces ensembles

$$\cos' = -\sin \quad \sin' = \cos \quad \tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$

On a de plus $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$.

Démonstration

Fonctions trigonométriques

Valeur de x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $-\sin(x)$					
Variations de $\cos$					
Valeur de x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\cos(x)$					
Variations de $\sin$					
Valeur de x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\frac{1}{\cos^2(x)}$					
Variations de $\tan$					

Ex. 1.5 Étudier la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}$.
Tracer rapidement sa représentation graphique.

II. Formules diverses**II.1. Linéarisation****Corollaire 1.8 (Formules de linéarisation)**

Quels que soient les réels a et b ,

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

Démonstration

Ex. 1.6 Calculer $I = \int_0^\pi \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) dx$.

II.2. Formules de factorisation**Corollaire 1.9 (Formules de factorisation)**

Quels que soient les réels p et q ,

$$\begin{aligned}
\cos(p) + \cos(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\cos(p) - \cos(q) &= -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\sin(p) + \sin(q) &= 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\sin(p) - \sin(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{aligned}$$

Démonstration

Ex. 1.7 Résoudre les équations suivantes :

$$(E_1) : \sin(3x) + \sin(5x) = \sin(4x) \quad (E_2) : \cos(x) - \cos(2x) + \cos(3x) = 1$$

II.3. Angle moitié**Corollaire 1.10**

Soit x un réel tel que $\tan(x)$ et $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soient définis.

On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

Démonstration

Ex. 1.8 On se place dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct.

On note O l'origine du repère, I le point de coordonnées $(1; 0)$ et J le point de coordonnées $(0; 1)$.

Pour tout réel t , on définit le point M_t du plan de coordonnées $\left(\frac{1}{1+t^2}; \frac{t}{1+t^2}\right)$.

Montrer que, quel que soit le réel t choisi, M_t appartient au cercle de diamètre $[OI]$.

Réciproquement, est-ce que tous les points de ce cercle peuvent s'écrire M_t pour un réel t bien choisi ?