

Ensembles finis, calcul littéral

I. Entiers, récurrence

Ex. 2.1 (Cor.) Déterminer les valeurs possibles du chiffre a pour que $999999993a4$ soit divisible par 12.

Ex. 2.2 (Cor.) [*] **Algorithme d'Euclide**

On rappelle que étant donnés deux entiers a et b positifs distincts non nuls, l'algorithme d'Euclide est le suivant :

- on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$;
- tant que c'est possible - c'est-à-dire tant que $b_n \neq 0$ -, on définit $a_{n+1} = b_n$ et b_{n+1} comme le reste de la division de a_n par b_n ;
- lorsque, pour un certain entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $b_{n_0} = 0$, la valeur de a_{n_0} est le PGCD($a; b$) recherché.

1. Écrire l'algorithme d'Euclide pour $a = 1653$ et $b = 2717$.
2. Montrer que si $n > 0$ alors $a_{n+1} < a_n$ et $b_{n+1} < b_n$ si ces termes sont définis.
3. Montrer que tant que a_n, b_n, a_{n+1} et b_{n+1} sont strictement positifs, $\text{PGCD}(a_n; b_n) = \text{PGCD}(a_{n+1}; b_{n+1})$

Remarque : ce type d'égalité entre des quantités calculées à chaque pas d'un algorithme est appelé **invariant de boucle** en informatique.

4. En déduire que l'algorithme d'Euclide se termine.
5. Montrer que si $b_n = 0$ alors $a_n = \text{PGCD}(a; b)$.
6. Écrire un code Python permettant étant données deux variables a et b de calculer leur PGCD.

Ex. 2.3 (Cor.) [*] Soit p un nombre premier supérieur à 4. Montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Ex. 2.4 (Cor.) [*] Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\text{PGCD}(a; b) \text{ PPCM}(a; b) \leq ab$.

Ex. 2.5 (Cor.) [**] Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\text{PGCD}(a; b) \text{ PPCM}(a; b) = ab$.

Ex. 2.6 Trouver **tous** les entiers naturels x, y tels que

$$\begin{cases} x + y &= 56 \\ \text{PPCM}(x; y) &= 105 \end{cases}.$$

Ex. 2.7 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto xe^x$.

Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n -ème de f est la fonction

$$f^{(n)} : x \in \mathbb{R} \mapsto (x + n)e^x$$

Ex. 2.8 On définit les suites u et v par :

- $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n$
- $v_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = n - v_n$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{n(n-1)}{2}$.
2. Trouver une formule explicite similaire pour la suite v , et la démontrer.

Ex. 2.9 Pour tout entier $n \geq 3$, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ par :
« il existe $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{N}^{*n}$ tel que $u_1 < u_2 < \dots < u_n$ et

$$1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k}. \text{ »}$$

1. Analyse du cas $n = 3$: on suppose qu'il existe $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{N}^{*3}$ tel que $u_1 < u_2 < u_3$ et $1 = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}$.
A. Montrer que $u_1 < 3$. En déduire la valeur de u_1 .
B. Trouver les valeurs de u_2 et u_3 .
2. Montrer que $\mathcal{P}(4)$ est vraie et trouver tous les quadruplets qui satisfont cette propriété.
3. Montrer par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 3$.

II. Sommes et produits finis

Ex. 2.10 Transformer en utilisant le signe $\sum$ puis simplifier pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1)$$

Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Ex. 2.11 (Cor.) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$,
 $S_n = 1 \times (n + 1) + 2 \times n + 3 \times (n - 1) + \dots + n \times 2 + (n + 1) \times 1$

Ex. 2.12 Calculer $S = \sum_{k=5}^{30} \frac{k^2 - 2k - 3}{k + 1}$.

Indication : on pourra effectuer le changement d'indice $j = k + 1$ ou remarquer que $\frac{k^2 - 2k - 3}{k + 1} = \dots$

Ex. 2.13 Simplifier les sommes suivantes (n étant un entier naturel) :

$$\begin{aligned} & \bullet \sum_{k=3}^{10} 2^{k-1} & \bullet \sum_{k=-2}^n \frac{1}{3^{k+1}} & \bullet \sum_{k=-5}^{15} k(10 - k) \\ & \bullet \sum_{k=0}^n \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}} & \bullet \sum_{k=1}^n n - k + 1 & \bullet \sum_{k=-n}^{n-1} \sin(2k + 1) \end{aligned}$$

Ex. 2.14 Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$,
 $S_n = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \min(i, j)$ et $T_n = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \max(i, j)$.

Ex. 2.15 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}^*$: $P = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Ex. 2.16 Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{2n} k} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$

Ex. 2.17 Calculer et simplifier (pour $n \in \mathbb{N}$) les sommes suivantes :

$$I = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$$

$$J = \sum_{k=1}^n k \times (k!)$$

III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

Ex. 2.18 Petite formule Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout entier $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

En déduire une expression simplifiée de

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k}$$

et de

$$T_n = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}$$

Ex. 2.19 Simplifier les sommes suivantes : étant donnés un entier naturel n , $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et un complexe z

$$S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \quad S_2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} \quad S_3 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k$$

$$S_4 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^n \quad S_5(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{k+1} (1-z)^{n-k}$$

$$T_p = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$$

Ex. 2.20 $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq p \leq n$.

1. Montrer que $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Indication : on pourra tenter d'utiliser la formule de Pascal pour faire apparaître un télescopage.

Ou bien faire une démonstration par récurrence.

2. Simplifier la somme $S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{2n-1}{2n-1-k}$
puis la fraction $A_n = \frac{S_n}{\binom{2n}{n}}$.

Ex. 2.21 Soient $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\frac{p+1}{\binom{n+p-1}{p}} - \frac{p+1}{\binom{n+p}{p}} = \frac{p}{\binom{n+p}{p+1}}$.
2. En déduire une expression simplifiée de $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(i+2)}$
et
 $T_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(i+2)(i+3)}$.

Corrections

Cor. 2.1 : Soit $N = 99999999304 + a \times 10$. N doit être divisible par 12 or $99999999300 = 12 \times 25 \times 333333331$. Donc $12|N \Leftrightarrow 12|(10a+4)$.

Deux solutions s'offrent alors :

- comme a est un *chiffre*, $a \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. On essaye toutes les valeurs de a et on montre que $12|(10a+4)$ pour
 - ★ $a = 2 : 20 + 4 = 24 = 2 \times 12$;
 - ★ $a = 8 : 84 = 7 \times 12$.
- on écrit : $10a + 4 = (12 - 2)a + 4 = 12a + 4 - 2a$ est divisible par 12 si et seulement si $4 - 2a$ l'est. On retrouve à nouveau les deux cas possibles, $a = 2$ donne $4 - 2a = 0$ et $a = 2 + 6 = 8$ donne $4 - 2a = -12$, de façon plus simple à calculer.

Cor. 2.2 :

a_i	b_i	$a_i = qb_i + r$
1653	2717	$1653 = 0 \times 2717 + 1653$
2717	1653	$2717 = 1 \times 1653 + 1064$
1653	1064	$1653 = 1 \times 1064 + 589$
1064	589	$1064 = 1 \times 589 + 475$
589	475	$589 = 1 \times 475 + 114$
475	114	$475 = 4 \times 114 + 19$
114	19	$114 = 6 \times 19 + 0$
19	0	Impossible

Le PGCD de 1653 et 2717 est 19.

2. À partir du rang $n = 1$, les termes a_n et b_n sont définis par la formule de récurrence $a_n = b_{n-1}$ et b_n est le reste de la division euclidienne de a_{n-1} par b_{n-1} : donc $b_n < b_{n-1} = a_n$.
De plus, comme $a_{n+1} = b_n$, $a_{n+1} < a_n$.
3. Soit d un diviseur commun de a_n et b_n . $d|a_{n+1}$ puisque $a_{n+1} = b_n$.
De plus, la division euclidienne $a_n = qb_n + r$ permet d'écrire $r = a_n - qb_n$ qui est donc divisible par d (comme différence de deux nombres divisibles par d).
Donc d divise $r = b_{n+1}$.
Donc l'ensemble D_n des diviseurs communs à a_n et b_n est inclus dans l'ensemble D_{n+1} défini de même.
Réciproquement, en écrivant que $a_n = qa_{n+1} + b_{n+1}$, on montre que $D_{n+1} \subset D_n$.
Donc $D_n = D_{n+1}$
et $\text{PGCD}(a_n; b_n) = \max D_n = \max D_{n+1} = \text{PGCD}(a_{n+1}; b_{n+1})$.
4. On a montré que tant que l'algorithme n'est pas terminé $b_n < b_{n-1}$. La suite (b_n) est donc une suite strictement décroissante d'entiers positifs (puisque le reste d'une division euclidienne est positif). Il est donc impossible que cette suite soit infinie (il n'y a qu'un nombre fini d'entiers positifs inférieurs $b_0 = b$).
L'algorithme d'Euclide se termine donc en un nombre fini d'étapes, lorsque le reste de la division euclidienne effectuée dans une boucle est nul.
5. Supposons que $b_n = 0$. Alors $a_{n-1} = qb_{n-1} + 0$ est multiple de b_{n-1} . Donc $\text{PGCD}(a_{n-1}; b_{n-1}) = \text{PGCD}(qb_{n-1}; b_{n-1}) = b_{n-1} = a_n$.
Or pour tout n valide $\text{PGCD}(a_n; b_n) = \text{PGCD}(a; b)$ (c'est un invariant, sa valeur est la même qu'au début de l'algorithme).
Donc $\text{PGCD}(a; b) = a_n$ lorsque $b_n = 0$.
6.

```
def euclide(a,b):
    while b>0:
```

```

a,b=b,a%b
print(a,b)
return a

```

Cor. 2.3 : Si p premier est supérieur à 4, en particulier $2 \nmid p$ et $3 \nmid p$. Donc $p = 1 + 6k$ ou $p = 5 + 6k$, $k \in \mathbb{N}$ (tous les autres cas donnent un nombre divisible par 2 ou 3).

Donc $p^2 - 1 = 12k + 36k^2 = 12k(1 + 3k)$ ou $p^2 - 1 = 24 + 60k + 36k^2 = 24 + 12k(5 + 3k)$.

Or si k est pair, alors $12k$ est un multiple de 24.

Et si k est impair, $12(1 + 3k)$ et $12(5 + 3k)$ sont des multiples de 24.

Donc $p^2 - 1$ est divisible par 24 pour tout nombre premier p supérieur à 4.

Cor. 2.4 : Considérons la fraction $F = \frac{ab}{\text{PGCD}(a;b)}$.

D'une part, $F = \frac{a}{\text{PGCD}(a;b)} \times b$. Comme $\text{PGCD}(a;b)$ divise a , F est un entier multiple de b et de $a' = \frac{a}{\text{PGCD}(a;b)} \in \mathbb{N}$.

D'autre part, $F = \frac{b}{\text{PGCD}(a;b)} \times a$. Comme $\text{PGCD}(a;b)$ divise b , F est un entier multiple de a et de $b' = \frac{b}{\text{PGCD}(a;b)} \in \mathbb{N}$.

F est donc un multiple de a et de b . Par conséquent $\text{PPCM}(a;b)$ qui est **le plus petit** des multiples de a et de b vérifie

$$\text{PPCM}(a;b) \leq F$$

En remplaçant F par sa définition on obtient donc $\text{PGCD}(a;b) \text{ PPCM}(a;b) \leq ab$

Cor. 2.5 : En reprenant les notations et la démonstration de l'exercice 2.4, on a $F = \frac{ab}{\text{PGCD}(a;b)} = k \text{ PPCM}(a;b)$ pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

En posant $G = \frac{ab}{\text{PPCM}(a;b)}$, on a donc $G = k \text{ PGCD}(a;b)$. En particulier, G est un entier.

Or $\text{PPCM}(a;b)$ est un multiple (strictement positif) de a donc il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{PPCM}(a;b) = ia$. De même, il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{PPCM}(a;b) = jb$.

Donc $G = \frac{ab}{ia} = \frac{b}{i}$ divise b et de même $G = \frac{ab}{jb} = \frac{a}{j}$ divise a .

Or $\text{PGCD}(a;b)$ est le plus grand diviseur commun à a et b donc $\text{PGCD}(a;b) \geq G$.

En remplaçant G par sa définition, on obtient donc $\text{PGCD}(a;b) \text{ PPCM}(a;b) \geq ab$.

Le résultat de l'exercice 2.4 permet alors de conclure que $\text{PGCD}(a;b) \text{ PPCM}(a;b) = ab$.

Cor. 2.11 : Le premier travail à faire est d'exprimer cette somme à l'aide d'un signe $\sum$:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n+1} i(n+2-i)$$

Ensuite, on utilise les différentes techniques du cours. Par exemple :

$$\begin{aligned}
S_n &= (n+2) \sum_{i=1}^{n+1} i - \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = (n+2) \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= (n+1)(n+2) \frac{3n+6-2n-3}{6} \\
&= \binom{n+3}{3}
\end{aligned}$$