

Nombres complexes

I. Conjugué, module, parties réelle et imaginaire

Ex. 3.1 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$A = \frac{1}{2-i} \quad B = (1+i)^9 \quad C = \frac{7+3i}{5-2i} \quad D = (1+2i)^{-3}$$

Ex. 3.2 Soit z un nombre complexe différent de i .

Montrer que $Z = \frac{iz-1}{z-i}$ **est bien défini** et que $Z \neq i$.

Ex. 3.3 Soit $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |u| = 1$

Ex. 3.4 Montrer que si z_1 et z_2 sont des complexes de module inférieur ou égal à 1 alors $|z_1 + z_2| \leq \sqrt{2}$ ou $|z_1 - z_2| \leq \sqrt{2}$.

Ex. 3.5 Soit z un nombre complexe de module 1, différent de -1 .

Montrer que $u = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}$ est bien défini et que $u \in i\mathbb{R}$.

II. Trigonométrie

Ex. 3.6 Écrire sous la forme trigonométrique les complexes suivants :

$$z_1 = -3 \quad z_2 = -3i \quad z_3 = -2+2i \quad z_4 = \sqrt{3}-i \quad z_5 = \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) - i$$

Ex. 3.7 Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $a = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$ et $b = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$.

1. Montrer que $\bar{a} = b$ puis calculer $a+b$ et ab .
2. En déduire a et b .

Ex. 3.8 Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Écrire $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

2. En prenant $\theta = \frac{\pi}{5}$, déduire de la question précédente la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

3. Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)}$.

Ex. 3.9 Linéariser les polynômes trigonométriques :

$$A(x) = \sin^5 x \quad B(x) = \cos^3 x \sin^2 x \quad C(x) = \cos^6 x$$

Ex. 3.10 Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $A_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$

$$\text{et } B_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin(kx).$$

Ex. 3.11 (Cor.) **[**]** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $D_n : x \in [-\pi; \pi] \mapsto$

$$1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) \text{ et } F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

1. Que vaut $D_n(0)$?

2. Montrer que pour tout $x \in [-\pi; \pi] \setminus \{0\}$,

$$D_n(x) = 2 \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + 1.$$

3. En déduire que pour tout $x \in [-\pi; \pi] \setminus \{0\}$,

$$D_n(x) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

4. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$?

5. Montrer que pour tout $x \in [-\pi; \pi] \setminus \{0\}$,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$$

6. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} F_n(x)$?

III. Divers

Ex. 3.12 Soit z un nombre complexe et $Z = 1 + z + z^2$.
Montrer que $Z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$ ou $\operatorname{Re}(z) = \frac{-1}{2}$.

Ex. 3.13 Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer $S_n = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} \binom{k}{j}$ et $T_n = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} (-1)^j \binom{k}{j}$.

En déduire la valeur de $\sum_{\substack{0 \leq j \leq k \leq n \\ j \text{ pair}}} \binom{k}{j}$ et $\sum_{\substack{0 \leq j \leq k \leq n \\ j \text{ impair}}} \binom{k}{j}$.

Ex. 3.14 Soit z un nombre complexe et n un entier strictement positif.
Simplifier la somme

$$A_n = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} z^j$$

en distinguant les cas $z = 1$ et $z \neq 1$.

Ex. 3.15

1. Soient k un entier naturel non nul et $p \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket$.

Montrer que $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$.

2. En déduire une expression simplifiée de

$$S_{n,p} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$$

Ex. 3.16 Résoudre les systèmes suivants d'inconnues **complexes** :

$$\begin{cases} (1+i)x + y = 2i \\ ix + (1+i)y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + iy - z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

Ex. 3.17 Résoudre et **discuter suivant la valeur du paramètre** a **complexe** le système suivant d'inconnues $(x; y; z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ay + z = 1 \\ x + az = 1+i \end{cases}$$

Ex. 3.18 Soit $h : \begin{cases} H \rightarrow D \\ z \mapsto \frac{z-i}{z+i} \end{cases}$ où $H = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0\}$,
 $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

1. Justifier rapidement que h est bien définie sur H .
2. Soit $z \in H$. Montrer que $h(z) \in D$.
3. Soit $Z \in D$. Montrer qu'il existe $z \in H$ tel que $Z = h(z)$.
4. Que peut-on déduire des deux questions précédentes concernant l'application h ?
5. Soit $z \in H$ et $z' \in H$ tels que $h(z) = h(z')$.
Montrer que $z = z'$.
6. Que peut-on déduire de la question précédente concernant l'application h ?
7. Montrer que h est une bijection de H vers D et donner l'expression de sa bijection réciproque.
[Espace de départ.](#) [Espace d'arrivée.](#) [Animation de la transformation.](#)

Corrections

Cor. 3.11 :

1. $D_n(0) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n 1 = 2n + 1$.
2. Soit $x \in [-\pi; \pi] \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) \\
&= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(e^{ikx}) \\
&= 1 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikx} \right) \\
&= 1 + 2 \operatorname{Re} \left(e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \right) \quad \text{car } x \in [-\pi; \pi] \setminus \{0\} \text{ donc } e^{ix} \neq 1 \\
&= 1 + 2 \operatorname{Re} \left(e^{ix} \frac{e^{i\frac{n}{2}x} (e^{-i\frac{n}{2}x} - e^{i\frac{n}{2}x})}{e^{i\frac{x}{2}} (e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})} \right) \\
&= 1 + 2 \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{n+1}{2}x} \frac{-2i \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right) \\
&= 1 + 2 \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, pour $x \in [-\pi; \pi] \setminus \{0\}$, $D_n(x) = 2 \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + 1$.

Or $\sin(a) \cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= 2 \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + 1 \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + 1 \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 + 1 \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} D_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) = 2n + 1$ car les fonctions entrant dans la somme sont continues en 0.

5. Soit $x \in [-\pi; \pi] \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{n \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right) \\
&\quad (\text{car } x \in [-\pi; \pi] \setminus \{0\}).
\end{aligned}$$

Calculons et simplifions donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im}\left((e^{i\frac{x}{2}})^{2k+1}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\frac{x}{2}})^{2k+1}\right) \quad \text{car } \operatorname{Im}(\cdot) \text{ est } \mathbb{R}\text{-linéaire} \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{x}{2}} \times \frac{1 - (e^{ix})^n}{1 - e^{ix}}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{x}{2}} \times \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{x}{2}} \times \frac{e^{i\frac{nx}{2}} (e^{-i\frac{nx}{2}} - e^{i\frac{nx}{2}})}{e^{i\frac{x}{2}} (e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{nx}{2}} \times \frac{-2i \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \\
&= \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Donc $F_n(x) = \frac{1}{n \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$, c'est-à-dire

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2$$

$$6. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{n} \left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} F_n(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2k + 1$$

$$\text{Donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{n} \left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2 = \frac{1}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} + n \right).$$

C'est-à-dire

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{n} \left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2 = n$$