

Trigonométrie, sommes finies

Exercice 1.

Soit u la suite définie par $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

- 1) Calculer u_1, u_2 et u_3 .
- 2) Pour x un réel quelconque, donner $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
- 3) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{u_n}{2}$$

- 4) Dédurre des questions précédentes la limite de la suite u .

Exercice 2.

Soit n un entier naturel.

On note $A_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\binom{k}{2}}$, $B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{n}$ et $C_n = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n+k}{n}}{2^k}$.

Le but de cet exercice est de simplifier ces trois sommes.

Calcul des premiers termes

- 1) Calculer la valeur de $A_2, A_3, B_0, B_1, C_0, C_1$ et C_2 .

Calcul de A_n

- 2) Montrer que pour tout entier k **supérieur ou égal à 2**, $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)}$.
- 3) Dédurre de la question précédente que $A_n = \frac{2(n-1)}{n}$.

Calcul de B_n

- 4) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1} - \binom{n+k}{n+1}$$

- 5) Dédurre de la question précédente une expression simplifiée de B_n .

Calcul de C_n

- 6) À l'aide de la question 4., montrer que $C_{n+1} = qC_n$ où q est un réel que l'on précisera.
- 7) En déduire une expression simplifiée de C_n .