

Correction DM n°1

Exercice 1.

1) $u_1 = \sqrt{2-2} = \sqrt{0} = 0.$

$$u_2 = \sqrt{2+0} = \sqrt{2}.$$

$$u_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

2) Pour x un réel quelconque, on a d'après le cours $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

3) Montrons **par récurrence** que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{u_n}{2}$.

Initialisation :

Pour $n = 0$: $\cos\left(\frac{\pi}{2^0}\right) = \cos(\pi) = -1$ et $\frac{u_0}{2} = -1$.

Hérédité :

Supposons que pour n entier donné, on ait $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{u_n}{2}$.

Alors, $\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \cos\left(2\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 1$ d'après la question précédente.

Par ailleurs, $n+1 \geq 1$, donc $\frac{\pi}{2^{n+1}} \leq \frac{\pi}{2}$ et par conséquent $\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \geq 0$.

On en conclut donc que $2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{u_n}{2} + 1 = \frac{u_n + 2}{2}$

puis que $\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{u_n + 2}{4}} = \frac{\sqrt{u_n + 2}}{2} = \frac{u_{n+1}}{2}$

Conclusion : la propriété est initialisée au rang 0, héréditaire à partir de ce rang, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{u_n}{2}$

4) La question précédente permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 2\cos(0) = 2$ (car $\cos$ est continue).

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

Exercice 2.

Calcul des premiers termes

1) $A_2 = 1$, $A_3 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

$$B_0 = 1, B_1 = 1 + 2 = 3.$$

$$C_0 = 1, C_1 = 1 + \frac{2}{2} = 2 \text{ et } C_2 = 1 + \frac{3}{2} + \frac{6}{4} = 4.$$

Calcul de A_n

2) Soit k un entier **supérieur ou égal à 2**.

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}.$$

3) En utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}
 A_n &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{\binom{k}{2}} \\
 &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{\frac{k(k-1)}{2}} \\
 &= \sum_{k=2}^n \frac{2}{k(k-1)} \\
 &= 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \\
 &= 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \quad \text{par télescopage} \\
 &= \frac{2(n-1)}{n}
 \end{aligned}$$

Calcul de B_n

4) Pour un entier $a \in \mathbb{N}$ et un entier $b \in \llbracket 0; a-1 \rrbracket$, la formule de Pascal permet d'affirmer que

$$\binom{a}{b} + \binom{a}{b+1} = \binom{a+1}{b+1}$$

En posant $a = n+k$ et $b = n$, $b < a \Leftrightarrow k > 0$.

Donc, pour tout entier n et tout entier $k > 0$, la formule de Pascal s'écrit

$$\binom{n+k}{n} + \binom{n+k}{n+1} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

D'où l'on déduit : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1} - \binom{n+k}{n+1}$$

$$\begin{aligned}
 B_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{n} \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n+k}{n} \\
 5) \quad &= 1 + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n+k+1}{n+1} - \binom{n+k}{n+1} \right] \\
 &= 1 + \binom{2n+1}{n+1} - \binom{n+1}{n+1} \quad \text{par télescopage} \\
 &= \binom{2n+1}{n+1}
 \end{aligned}$$

Calcul de C_n

$$\begin{aligned}
C_n &= \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n+k}{n}}{2^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n+k}{n}}{2^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n+k+1}{n+1} - \binom{n+k}{n+1}}{2^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n+k+1}{n+1}}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n+k}{n+1}}{2^k} \\
6) \quad &= 1 + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{\binom{n+j}{n+1}}{2^{j-1}} - \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n+k}{n+1}}{2^k} \text{ en posant, dans la première somme, } j = k+1 \\
&= 1 + \frac{\binom{2n+1}{n+1}}{2^n} - \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{\binom{n+k}{n+1}}{2^k} \\
&= \frac{\binom{2n+1}{n+1}}{2^n} + \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n+k}{n+1}}{2^k} \\
&= \frac{\binom{2n+1}{n+1}}{2^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\binom{n+k}{n+1}}{2^k} \\
&= \frac{\binom{2n+1}{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n+1+k}{n+1}}{2^k} \text{ après un nouveau changement d'indice}
\end{aligned}$$

Il manque le terme d'indice $k = n+1$ dans la somme : il s'écrit $\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{2^{n+2}}$ (en développant le $1/2$ en facteur).

$$\text{Or } \frac{\binom{2n+1}{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{\binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{2n+1-n-1}}{2^{n+2}} = \frac{\binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{n}}{2^{n+2}} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{2^{n+2}}.$$

$$\text{Donc } C_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\binom{n+1+k}{n+1}}{2^k} = \frac{1}{2} C_{n+1}.$$

La suite C est donc géométrique de raison 2.

7) On en déduit que $C_n = 2^n C_0 = 2^n$.