

Logique, ensembles, applications

I. Éléments de logique

Ex. 4.1 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Écrire chacune d'elles comme une implication.

1. Une condition suffisante pour qu'un nombre réel soit supérieur ou égal à 2 est qu'il soit supérieur ou égal à 3.
2. Une condition nécessaire pour qu'un nombre entier soit strictement supérieur à 2 est qu'il soit supérieur ou égal à 3.
3. Pour qu'un nombre réel soit strictement supérieur à 2, il faut que son carré soit strictement supérieur à 4.

Ex. 4.2 [*] Soient $x, y \in \mathbb{Q}_+$ tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels. Montrer (par l'absurde) que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est aussi irrationnel.

Ex. 4.3 [*] On dispose de neuf billes visuellement identiques, huit d'entre elles ont même masse mais la neuvième est plus lourde. Comment, en deux pesées sur une balance à deux plateaux, peut-on démasquer l'intrus ?

Ex. 4.4 Soit x et y deux réels. Démontrer que $(x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \Leftrightarrow (xy + 1 - x - y \neq 0)$.

Ex. 4.5 [**] Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, f(x - f(y)) = 2 - x - y$$

Ex. 4.6 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{N}$.

Donner un exemple de réel positif x **non entier** pour lequel $x + \frac{1}{x}$ **est entier**.

Ex. 4.7 [**] 10 personnes jouent au jeu suivant : on leur attribue à chacune un numéro compris entre 1 et 10 (inclus), qu'elles portent sur le front et ne voient pas. En revanche elles voient le numéro porté par chacune des 9 autres personnes.

Remarque : les numéros sont attribués aléatoirement et indépendamment, un même numéro peut donc apparaître plusieurs fois.

Chaque personne marque sur une ardoise le numéro qu'elle pense porter. Elles ne communiquent en rien, sont parfaitement honnêtes. À un moment décidé à l'avance, elles dévoilent toutes en même temps leur ardoise avec leur pronostic. Si l'une d'entre elle a effectivement trouvé le numéro qu'elle porte sur le front, l'ensemble du groupe a gagné. Sinon, l'ensemble du groupe a perdu.

1. Quelle est la probabilité que le groupe gagne ?
2. On leur donne une deuxième chance : elles peuvent d'abord se rassembler pour définir une stratégie de groupe, puis recommencent le jeu, exactement dans les mêmes conditions. Existe-t-il une stratégie permettant d'améliorer la probabilité de gain ? Si oui, quelle est la meilleure stratégie possible ?

II. Ensembles et quantificateurs

Ex. 4.8

1. Donner une définition par compréhension puis comme image directe de l'ensemble I des entiers relatifs impairs.
2. Donner une définition symbolique des ensembles suivants :
 - $E = \{-28; -21; -14; -7; 0; 7; 14; 21; 28; 35\}$
 - $F = \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100\}$

Ex. 4.9 Donner comme réunion d'intervalles les parties de $\mathbb{R}$ constituées des valeurs de x vérifiant les assertions suivantes :

1. $(x > 0 \text{ et } x < 1) \text{ ou } x = 0$;
2. $x > 3 \text{ et } x < 5 \text{ et } x \neq 4$;
3. $(x \leq 0 \text{ et } x > 1) \text{ ou } x = 4$;

4. $x \geq 0 \Rightarrow x > 3$.

III. Applications et fonctions

Ex. 4.10 [*] Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow]-1; 1[\\ x \mapsto \frac{x}{1+|x|} \end{cases}$.

Montrer que f est bijective et donner une expression de sa bijection réciproque.

Ex. 4.11 (Cor.) [*] L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, xy) \end{cases}$ est-elle injective? surjective?

Ex. 4.12 Démontrer que, si un nombre réel peut s'écrire sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, alors cette écriture est unique.

Ex. 4.13 [*] *ENAC 2023, 5 premières questions*

1. Sélectionner la/les assertion(s) vraie(s) :

A. La négation de $(\exists x \in E, A(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, A(x))$ est :

$$(\exists x \in E, A(x)) \wedge (\exists x \in E, \neg A(x))$$

B. La négation de $(\exists x \in E, A(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, A(x))$ est :

$$(\exists x \in E, A(x)) \vee (\exists x \in E, \neg A(x))$$

C. La négation de $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \leq N$ est :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$$

D. La négation de $\exists! x \in \mathbb{R}, x = x^2$ est $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq x^2$.

E. Aucune assertion n'est vraie.

2. Sélectionner la/les assertion(s) vraie(s) :

A. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$

B. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$

C. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$

D. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$

E. Aucune assertion n'est vraie.

3. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et les assertions P, Q, R suivantes :

$$P : (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$$

$$Q : (\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$$

$$R : (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \vee \forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)$$

$\neg P$ désigne la négation de P . Sélectionner la/les assertion(s) vraie(s) :

A. $\neg R \Rightarrow Q$

B. $\neg Q \Rightarrow \neg P$

C. $\neg P \Rightarrow \neg R$

D. $Q \Rightarrow R$

E. Aucune assertion n'est vraie.

4. Sélectionner la/les assertion(s) vraie(s) :

A. Une restriction au départ d'une fonction injective est une fonction injective.

B. Une restriction au départ d'une fonction surjective est une fonction surjective.

C. Un prolongement au départ d'une fonction injective est une fonction injective.

D. Un prolongement au départ d'une fonction surjective est une fonction surjective.

E. Aucune assertion n'est vraie.

5. Soient f et g les deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par : $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $g(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair, et $g(n) = 0$ sinon.

A. f est bijective

- B. g est bijective
- C. $f \circ g$ est bijective
- D. $g \circ f$ est bijective
- E. Aucune assertion n'est vraie.

IV. Équations et systèmes

Ex. 4.14 Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle x :

- (a) $(3x + 2)(x + 1) = -\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$
- (b) $(2x + 1)(x - 3)(x + 2) - (2x + 1)(x - 7) = 0$
- (c) $\ln(x + 1) - \ln(1 - x) = \ln 2$

Ex. 4.15 Résoudre l'équation d'inconnue réelle x et de paramètre réel m :

$$(m + 1)x + 3 = 2mx + m^2 + 2m.$$

Ex. 4.16 Résoudre le système suivant d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} z - y = 1 \\ x - az = 2 \\ ay - x = 3 \end{cases}$$

Ex. 4.17 Donner la nature et si possible une équation paramétrique de l'ensemble des solutions des systèmes d'équations suivants, d'inconnue $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$:

$$S_1 : \begin{cases} 3x - y + 2z = 5 \\ -8x + 3y + z = 1 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

Ex. 4.18

1. Résoudre et discuter suivant la valeur de $a, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ le système

$$S_3 : \begin{cases} ax + y + z = \alpha \\ x + ay + z = \beta \\ x + y + az = \gamma \end{cases}$$

2. Généraliser le résultat à un système de 4 équations à 4 inconnues, 5 équations à 5 inconnues, etc..., n équations à n inconnues.

Ex. 4.19 [*] Résoudre avec $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_i \in \mathbb{R}^*$ et $s \in \mathbb{R}$ le système d'inconnues $x_1, \dots, x_n$ réelles suivant

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n} \\ x_1 + \dots + x_n = s \end{cases}$$

Corrections

Cor. 4.11 : L'application n'est ni injective, ni surjective.

En effet, $f(1, 2) = (3, 2) = f(2, 1)$ donc l'application n'est pas injective.

De plus, montrons qu'il n'existe pas de couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x + y = 0$ et $xy = 1$. Comme le produit $xy \neq 0$, x et y sont non nuls. On a donc :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 0 \\ xy = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 0 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \end{aligned}$$

Or l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions réelles, donc f n'est pas surjective.