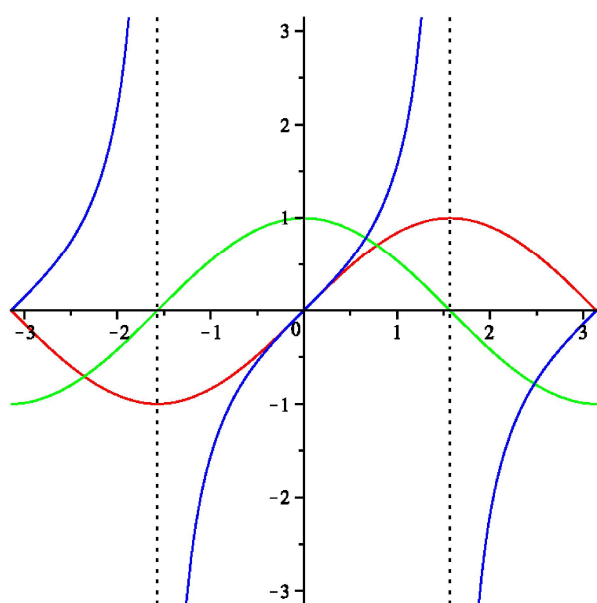


# Synthèse sur les notions d'analyse censées être connues

## V. Fonctions de référence

### Fonctions trigonométriques



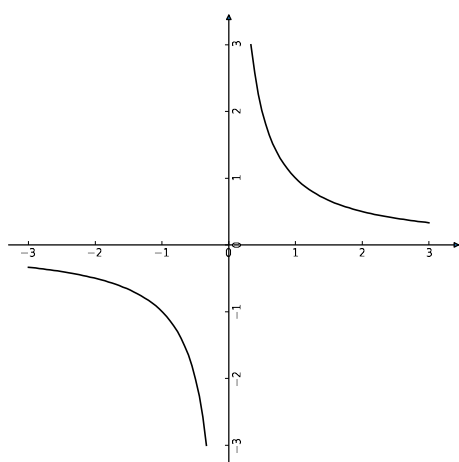
$$\begin{aligned}\cos' &= -\sin & \sin' &= \cos \\ \tan' &= \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 \\ \cos^2 + \sin^2 &= 1\end{aligned}$$

| Valeur de $x$        | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|----------------------|--------|------------------|---|-----------------|-------|
| Signe de $-\sin(x)$  | 0      | +                | 0 | -               | 0     |
| Variations de $\cos$ | -1     | $\nearrow$       | 1 | $\searrow$      | -1    |

| Valeur de $x$        | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|----------------------|--------|------------------|---|-----------------|-------|
| Signe de $\cos(x)$   |        |                  |   |                 |       |
| Variations de $\sin$ |        |                  |   |                 |       |

| Valeur de $x$                  | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|--------------------------------|--------|------------------|---|-----------------|-------|
| Signe de $\frac{1}{\cos^2(x)}$ |        |                  |   |                 |       |
| Variations de $\tan$           |        |                  |   |                 |       |

### Fonction « inverse »



Strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_-^*$  et sur  $\mathbb{R}_+^*$

**mais pas sur  $\mathbb{R}^*$ .**

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

Permet de retenir les limites :

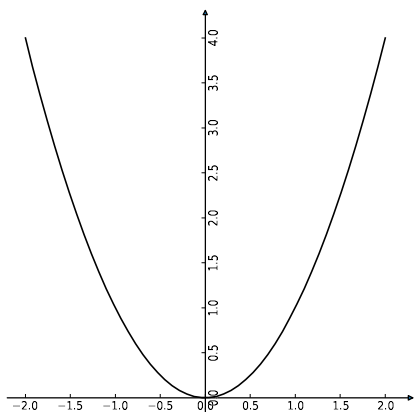
$$\frac{1}{-\infty} = 0^- \quad \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{1}{+\infty} = 0^+ \quad \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Plus précisément :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^- \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

**Fonction « carré »**

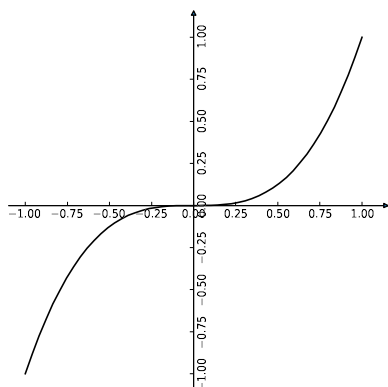
Strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_-$ .

Strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

$$(x^2)' = 2x$$

Limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

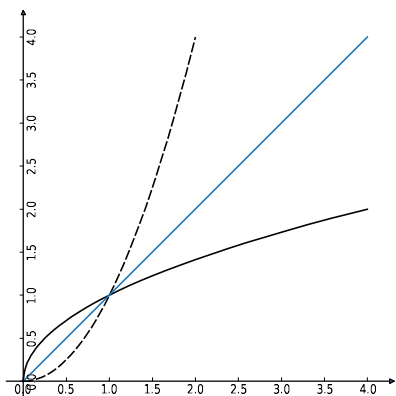
**Fonction « cube »**

Strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$(x^3)' = 3x^2$$

Limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

**Fonction « racine carrée »**

Strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

Continue sur  $\mathbb{R}_+$  **mais dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$** .

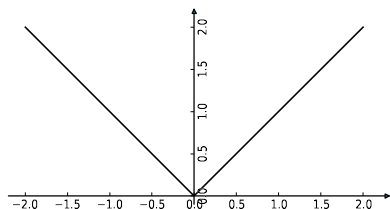
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

C'est la bijection réciproque de

$$x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_+.$$

Limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

**Fonction « valeur absolue »**

Strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_-$ .

Strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

Continue sur  $\mathbb{R}$  *mais dérivable sur*  $\mathbb{R}_-^*$  *et*  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, (|x|)' = -1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (|x|)' = +1$$

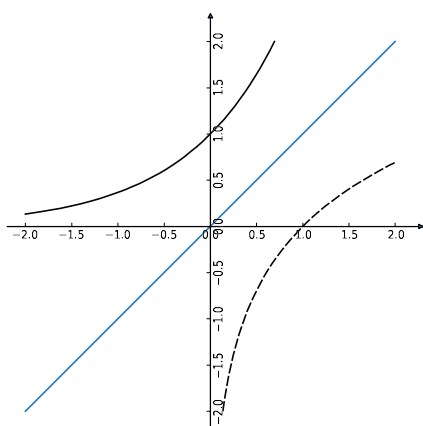
$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x^2} = x.$$

Limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty$$

**Fonctions exponentielle et logarithme (népérien)**

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

Bijective, strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$$

$$\exp' = \exp$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

Bij. réciproque de exp.

Strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln(x)} = x$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

**VI. Limites, dérivées****VI.1. Limites****Proposition 5.35 (Somme de fonctions)**

| $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \backslash \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ | $\alpha \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|----------------------------------------------------------------------|-------------------------|-----------|-----------|
| $\alpha' \in \mathbb{R}$                                             | $\alpha + \alpha'$      | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$                                                            | $+\infty$               | $+\infty$ | ???       |
| $-\infty$                                                            | $-\infty$               | ???       | $-\infty$ |

**Proposition 5.36 (Produit de fonctions)**

| $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \backslash \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ | $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ | $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$ | $\alpha = 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|--------------|-----------|-----------|
| $\alpha' \in \mathbb{R}_+^*$                                         | $\alpha\alpha'$             | $\alpha\alpha'$             | 0            | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\alpha' \in \mathbb{R}_-^*$                                         | $\alpha\alpha'$             | $\alpha\alpha'$             | 0            | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\alpha' = 0$                                                        | 0                           | 0                           | 0            | ???       | ???       |
| $+\infty$                                                            | $+\infty$                   | $-\infty$                   | ???          | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$                                                            | $-\infty$                   | $+\infty$                   | ???          | $-\infty$ | $+\infty$ |



### Méthode : Calcul de limite

- On utilise les tableaux précédents et les limites des fonctions de référence : dans le cas où cela donne la limite cherchée, **on donne directement cette limite sans justification**.
- Dans les tableaux précédents, les cases où se trouve ??? sont des **formes indéterminées** (FI) : dans ce cas, il faut « lever l'indétermination ».
- Pour lever une indétermination, il y a plusieurs techniques :
  - ★ simplifier les expressions ;
  - ★ factoriser les expressions conduisant à une FI par leur **terme prépondérant** ;
  - ★ dans le cas d'expressions faisant intervenir une racine carrée, multiplier et diviser par « l'expression conjuguée » ;
  - ★ théorème des gendarmes ;
  - ★ interpréter la limite comme étant **la dérivée d'une fonction en un point** ;
  - ★ utiliser les « **limites comparées** » (que nous verrons plus tard dans l'année).

**Exemples** : calculer les limites suivantes (une seule de ces limites n'existe pas)

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 + 3} & B &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^3}{x + x^2} & C &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-5 + \frac{1}{x^2}} & D &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln^2(x) + 1} \\
 E &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x)}{x} & F &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} & G &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} & H &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \\
 I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x} & J &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(x) & K &= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(x)
 \end{aligned}$$

## VI.2. Dérivées

- Les formules  $(cte)' = 0$ ,  $(x)' = 1$ ,  $(x^2)' = 2x$ ,  $(x^3)' = 3x^2$ ,  $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$ ,  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  sont toutes résumées par l'unique formule  $(x^n)' = nx^{n-1}$
- Soient  $\lambda, \mu$  deux réels,  $u, v$  deux fonctions dérivables.
 
$$\begin{aligned}
 (\lambda u + \mu v)' &= \lambda u' + \mu v' & (uv)' &= u'v + uv' & \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
 (e^u)' &= u' \times e^u & (\ln(u))' &= u' \times \frac{1}{u} & \left(\frac{1}{u}\right)' &= u' \times \frac{-1}{u^2} & (\sqrt{u})' &= u' \times \frac{1}{2\sqrt{u}} \\
 (u^2)' &= u' \times 2u & (u^3)' &= u' \times 3u^2 \dots
 \end{aligned}$$