

Sommes finies, nombres complexes, trigonométrie

L'usage d'une calculatrice est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Cours

Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

Exercices

Exercice 1.

Donner la **forme algébrique et la forme trigonométrique** des nombres complexes ci-dessous :

$$A = \frac{5+i}{3-2i}$$

$$B = \frac{4\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$$

$$C = (-1+i)^{20}$$

Exercice 2.

Résoudre le système suivant d'inconnues **complexes** u, v, w :

$$S : \begin{cases} iu + v + w = -1 \\ u + iv + w = 0 \\ u + v + iw = 1 \end{cases}$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

Exercice 3.

Soit f la fonction définie par $f : \begin{cases} I \rightarrow J \\ x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-x) \end{cases}$

- 1) Donner l'ensemble de définition I de f .
- 2) Étudier f sur son ensemble de définition et construire son tableau de variations.
- 3) Soit $y \in]-\infty; 0]$.
Résoudre l'équation $f(x) = y$.

Exercice 4.

- 1) Résoudre les équations suivantes :
 $(E_1) : \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$ $(E_2) : \cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$ $(E_3) : \tan(x) \tan(2x) = 1$
- 2) Montrer que pour tout réel x , $\sin(5x) = 16 \sin^5(x) - 20 \sin^3(x) + 5 \sin(x)$.
- 3) Dédire de la question précédente la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
- 4) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$.

Exercice 5.

Pour tout entier naturel n et tout entier naturel $p \geq n$, on définit les sommes suivantes :

$$S_{n,p} = \sum_{k=n}^p \binom{k}{n} \quad T_p = \sum_{k=0}^p S_{k,p} \quad U_n = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} \binom{k}{j} 2^k$$

Le but de cet exercice est de les simplifier.

1										
1	1									
1		1								
1			1							
1				1						
1					1					
1						1				
1							1			
1								1		
1									1	
1										1

- 1) **Recopier** et **compléter** le triangle de Pascal ci-contre :

- 2) À l'aide du triangle de Pascal de la question précédente, expliciter **chacun des termes des sommes ci-dessous**, puis calculer leur valeur :

$$S_{0,3} \quad S_{1,3} \quad S_{2,3} \quad S_{3,3} \quad T_3 \quad U_3$$

- 3) Justifier que, pour tout entier k **strictement positif** et pour tout entier $n \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket$, on a :

$$\binom{k}{n} = \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1}$$

- 4) En utilisant la question précédente, montrer que $S_{n,p} = \binom{p+1}{n+1}$.

- 5) En déduire une expression simplifiée, pour $p \in \mathbb{N}$, de T_p .

- 6) Quelle est la somme de toutes les cases du triangle de Pascal rempli à la question 1) ?

Indication : en réfléchissant bien, on peut répondre à cette question sans avoir à effectuer vraiment cette somme...

- 7) Simplifier U_n .

(On attend ici une expression ne faisant plus intervenir le signe $\sum$...)