

Correction DS n°1

Exercice 1.

Formes algébriques :

$$A = \frac{5+i}{3-2i} = \frac{(5+i)(3+2i)}{3^2+2^2} = \frac{15-2+13i}{13} = 1+i$$

$$B = \frac{4\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}(-3-i\sqrt{3})}{9+3} = \frac{-12\sqrt{3}-12i}{12} = -\sqrt{3}-i$$

$$C = (-1+i)^{20} = ((-1+i)^2)^{10} = (-2i)^{10} = (4)^5 \times (i^2)^5 = -1024$$

Formes trigonométriques :

$$A = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$B = 2 \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1}{2} \right) = 2e^{\frac{-5i\pi}{6}}$$

$$C = -1024 = 1024 \times (-1) = 1024e^{i\pi}$$

Exercice 2.

$$\begin{aligned} S &\Leftrightarrow \begin{cases} iu + v + w = -1 \\ u + iv + w = 0 \\ u + v + iw = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2v + (1-i)w = -1 & L_1 \leftarrow L_1 - iL_2 \\ u + iv + w = 0 \\ (1-i)v + (i-1)w = 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (3-i)v = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ u + iv + w = 0 \\ (1-i)v + (i-1)w = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ u = -w = \frac{1+i}{2} \\ w = \frac{1}{i-1} = \frac{-1-i}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, ce système possède une unique solution $(u; v; w)$ qui est

$$(u; v; w) = \left(\frac{1+i}{2}; 0; \frac{-1-i}{2} \right)$$

Exercice 3.

1) $f(x)$ est définie si et seulement si $\begin{cases} 1+x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$.

Donc l'ensemble de définition de f est $I =]-1; 1[$.

2) f est continue et dérivable sur I et $\forall x \in I$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{-1}{1-x} = \frac{-2x}{1-x^2}.$$

Or pour $x \in I$, $x^2 < 1$, donc $f'(x)$ est du signe de $-2x$.

Valeurs de x	-1	0	1
Signe de $f'(x)$		+	-
Variations de f	_{-∞}	↗	↘ _{-∞}

3) Soit $y \in J$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln(1-x^2) = y \Leftrightarrow 1-x^2 = e^y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1-e^y}$$

L'équation $f(x) = y$ possède donc deux solutions dans le cas général, sauf pour $y = 0$, pour laquelle $x = 0$ est solution unique.

Exercice 4.

1) • Équation $(E_1) : \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$

En utilisant la formule $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, on montre que pour tout réel x

$$\sin(x) + \sin(3x) = 2\sin(2x)\cos(x).$$

$$\text{Donc } (E_1) \Leftrightarrow \sin(2x)(1 + 2\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2x) = 0 \\ \text{ou} \\ \cos(x) = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } (E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_1 = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

• Équation $(E_2) : \cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$

$$\text{Pour tout réel } x, \sin^4(x) = (1 - \cos^2(x))^2 = \cos^4(x) - 2\cos^2(x) + 1.$$

$$\text{Donc } (E_2) \Leftrightarrow 2\cos^4(x) - 2\cos^2(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ \text{ou} \\ \cos(x) = 1 \\ \text{ou} \\ \cos(x) = -1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \mathcal{S}_2 = \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

• Équation $(E_3) : \tan(x)\tan(2x) = 1$

$$(E_3) \Leftrightarrow \tan(x) \times \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} = 1 \Leftrightarrow 2\tan^2(x) = 1 - \tan^2(x) \Leftrightarrow \tan^2(x) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Donc ou bien } \tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right), \text{ ou bien } \tan(x) = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{Finalement } \mathcal{S}_3 = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2) En utilisant la formule d'Euler : pour tout réel x , $\sin(5x) = \mathcal{I}m\left((e^{ix})^5\right)$. Or :

$$\begin{aligned}
(e^{ix})^5 &= (\cos(x) + i \sin(x))^5 \\
&= \cos^5(x) + 5i \cos^4(x) \sin(x) - 10 \cos^3(x) \sin^2(x) - 10i \cos^2(x) \sin^3(x) + 5 \cos(x) \sin^4(x) + i \sin^5(x) \\
\text{Donc } \sin(5x) &= 5(1 - \sin^2(x))^2 \sin(x) - 10(1 - \sin^2(x)) \sin^3(x) + \sin^5(x). \\
\text{Et en développant, } \sin(5x) &= 16 \sin^5(x) - 20 \sin^3(x) + 5 \sin(x).
\end{aligned}$$

- 3) En posant $x = \frac{\pi}{5}$, on a $\sin(5x) = \sin(\pi) = 0$.
Donc $X = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $16X^5 - 20X^3 + 5X = 0$, et comme $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \neq 0$,
 X est solution de

$$(E) : 16X^4 - 20X^2 + 5 = 0$$

$$\Delta = 20^2 - 4 \times 5 \times 16 = 20 \times (20 - 16) = 80.$$

$$\text{Donc } X^2 = \frac{20 \pm \sqrt{80}}{32} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

$$\text{Comme par ailleurs } 0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}, \text{ on a } X^2 < \frac{1}{2}, \text{ donc } X^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}.$$

$$\text{Enfin } X > 0 \text{ donc } X = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

- 4) Comme $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$.

$$\text{Donc } \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{\frac{16 - 10 + 2\sqrt{5}}{16}}.$$

$$\text{Donc } \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{\sqrt{5}^2 + 2\sqrt{5} + 1}}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

Exercice 5.

1)

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

2) $S_{0,3} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

$$S_{1,3} = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$S_{2,3} = 1 + 3 = 4$$

$$S_{3,3} = 1$$

$$T_3 = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$$

$$U_3 = 2^1 + 2 \times 2^2 + 1 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 3 \times 2^3 + 1 \times 2^3 = 70$$

- 3) La formule de Pascal s'écrit, pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $K \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket$:

$$\binom{N}{K} + \binom{N}{K+1} = \binom{N+1}{K+1}$$

En posant $N = k$ et $K = n$, on a donc, pour tout entier k **strictement positif** et pour tout entier $n \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket$:

$$\binom{k}{n} = \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1}$$

4) Simplifions $S_{n,p}$:

$$\begin{aligned} S_{n,p} &= \sum_{k=n}^p \binom{k}{n} \\ &= \binom{n}{n} + \sum_{k=n+1}^p \binom{k}{n} \\ &= 1 + \sum_{k=n+1}^p \left(\binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1} \right) \\ &= 1 + \binom{p+1}{n+1} - \binom{n+1}{n+1} \quad \text{par télescopage} \\ &= \binom{p+1}{n+1} \end{aligned}$$

5) Simplifions T_p :

$$\begin{aligned} T_p &= \sum_{k=0}^p S_{k,p} \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k+1} \\ &= \sum_{j=1}^{p+1} \binom{p+1}{j} \quad \text{en effectuant le changement d'indice } j = k+1 \\ &= -1 + \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} \\ &= 2^{p+1} - 1 \end{aligned}$$

6) La somme de toutes les cases du triangle de Pascal rempli à la question 1) est égale, par définition de T_p , à T_{10} .

Elle vaut donc $T_{10} = 2^{11} - 1 = 2047$.

7) Simplifions U_n .

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} \binom{k}{j} 2^k \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^k \binom{k}{j} 2^k \right) \\
&= \sum_{k=1}^n 2^k \left(\sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n 2^k \left(-1 + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n 2^k (-1 + 2^k) \\
&= \sum_{k=1}^n 4^k - 2^k \\
&= 4 \times \frac{1 - 4^n}{1 - 4} - 2 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} \\
&= \frac{4(4^n - 1)}{3} - 2^{n+1} + 2
\end{aligned}$$