Chapitre 3
Superposition d'ondes

I cannot interfere.

Obi–Wan Kenobi - Star Wars V : The Empire Strikes Back (1980)

Bibliographie

✍Cap Prépa Physique MPSI–PCSI–PTSI, Pérez, 2013 $\longrightarrow$ Chapitre 2

Des interférences entre ondes peuvent aisément s'observer en optique comme en mécanique. Dans ce chapitre nous allons constater que les interférences apparaissent naturellement à l'aide du modèle d'onde plane progressive harmonique introduite au chapitre précédent. Nous proposerons également une description historique du phénomène de diffraction, qui peut être vu comme les interférences issues de la superposition d'un grand nombre d'ondes.

I Interférence à deux ondes

1.1 Superposition de deux ondes progressives

✍ Théorème de superposition
Deux ondes parcourant un même milieu linéaire se somment et peuvent être traités comme une unique onde.

Soit deux ondes planes progressives harmoniques de même amplitude se propageant dans des sens différents et de pulsation respectives ω_1 et ω_2. Les deux sources sont distantes de D de l'origine du repère (en -D pour la source de s_1 et en +D pour la source de s_2). Ainsi l'amplitude totale des perturbations se propageants dans le milieu peut s'écrire :

$$\begin{aligned} s(M,t) = s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t) &= S_m \cos(\omega_1 t - k_1(x+D) + \phi_1) + S_m \cos(\omega_2 t + k_2(x-D) + \phi_2) \\ &= 2S_m \cos(\frac{1}{2}((\omega_1+\omega_2)t - (k_1-k_2)x - (k_1+k_2)D + \phi_1 + \phi_2)) \cos(\frac{1}{2}((\omega_1-\omega_2)t - (k_1+k_2)x - (k_1-k_2)D + \phi_1 - \phi_2)) \,. \end{aligned}$$

Astuce : Formulaire trigonométrique

On aura besoin des relations $\cos(p)\cos(q) = \frac{1}{2}\left[\cos(p+q) + \cos(p-q)\right]$ et $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

1.2 Sources synchrones

Des sources sont dites synchrones si $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, ce qui entraîne $k_1 = k_2 = k$.

✍ Interférence entre deux ondes planes planes progressives harmoniques
L'expression de l'amplitude devient

$$s(M,t) = s(x,t) = 2S_m \cos(\omega t - kD + \phi)\cos(kx) \,.$$

Il apparait un découplage entre les dépendances temporelle et spatiale. Ainsi il existe des point où l'amplitude de l'onde est nulle, et ce indépendamment du temps. Ces points sont appelés des noeuds.

✍ Détermination de la position des noeuds
Les noeuds sont des points où l'amplitude de l'onde est toujours nulle :

$$\cos(kx) = 0 \iff kx_n = (n+\frac{1}{2})\pi \iff x_n = \frac{(2n+1)\pi}{2k} = \frac{(2n+1)\lambda}{4} \text{ avec } n \in \mathbb{N} \,.$$

Remarque : Par exemple deux ondes sonores convenablement choisies peuvent donc aboutir à des zones silencieuses ! C'est le fonctionnement des casques antibruits dits actifs.

Remarque : Les deux ondes s'annulant au niveau des noeuds, on parle d'interférences destructives. A l'opposé il existe des points de l'espace ou l'amplitude de l'onde est maximale. Ces points sont appelées des ventres.

✍ Détermination de la position des ventres
Les ventres sont des points où l'amplitude de l'onde est maximale :

$$\cos(kx) = 1 \iff kx_n = n\pi \iff x_n = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\lambda}{2} \text{ avec } n \in \mathbb{N} \,.$$

Remarque : Les deux ondes "s'amplifiant" mutuellement au niveau des ventres, on parle d'interférences constructives.

? TD03 – Pb 2

1.3 Battements

On considère maintenant des ondes aux caractéristiques proches mais pas identiques. Posons les grandeurs $\Omega = \omega_1 + \omega_2$, $\omega = \omega_1 - \omega_2 > 0$, $K = k_1 + k_2$, $k = k_1 - k_2$, $\Phi = \phi_1 + \phi_2$ et $\phi = \phi_1 - \phi_2$.

✍ Interférences entre deux ondes planes progressives harmoniques non identiques

L'expression de l'amplitude devient

$$s(M,t) = s(x,t) = 2S_m \cos\left(\frac{1}{2}(\Omega t - kx - KD + \Phi)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(\omega t - Kx - kD + \phi)\right)$$

Pour simplifier les interprétations on se place au point x_0 tel que $kx_0 + kD = 0$. Ainsi l'amplitude de l'onde se résume à

$$s(x,t) = 2S_m \cos\left(\frac{1}{2}(\Omega t + \Phi)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(\omega t + \phi)\right) .$$

L'amplitude de l'onde possède donc deux dépendances temporelles, l'une de pulsation grande $\Omega = \omega_1 + \omega_2$ et l'autre de pulsation petite $\omega = \omega_1 - \omega_2$: c'est le phénomène de battement temporel.

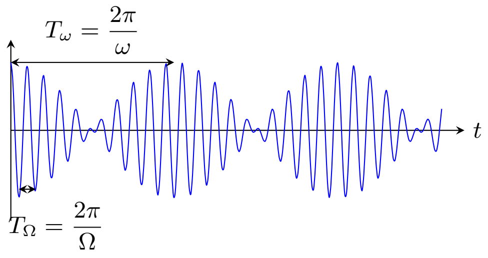


FIGURE 1 – Battements temporels

☕ Battements acoustiques en utilisant deux diapasons

Remarque : De la même façon il est possible de décrire des battements spatiaux.

II Ondes stationnaires

2.1 Réflexion d'une onde progressive

✍ Réflexion d'une onde progressive

Lorsqu'une onde progressive rencontre une discontinuité dans le milieu de propagation, il se crée une onde réfléchie qui prend pour origine cette discontinuité. Ainsi dans un milieu discontinue on observe la superposition d'une onde dite incidente et d'une onde dite réfléchie :

$$s(M,t) = s_i(M,t) + s_r(M,t) .$$

La célérité d'une onde progressive dépend uniquement des propriétés du milieu de propagation, ainsi l'onde incidente et l'onde réfléchie ont la même célérité $c = \frac{k_i}{\omega_i} = \frac{k_r}{\omega_r}$. Si l'on considère des ondes planes progressives harmoniques 1D, l'onde présente dans le milieu s'exprime :

$$\begin{aligned} s(M,t) = s(x,t) &= S_m(\cos(\omega_i t - k_i x + \phi_i) + r\cos(\omega_r t + k_r x + \phi_r)) \\ &= S_m\left(\cos\left(\omega_i\left(t - \frac{1}{c}x\right) + \phi_i\right) + r\cos\left(\omega_r\left(t - \frac{1}{c}x\right) + \phi_r\right)\right) ; \end{aligned}$$

avec $r \in [0,1]$ le coefficient de réflexion.

2.2 Conditions aux limites

Prenons l'exemple d'une corde vibrante. Le point de position $x = 0$ est le point où l'excitation est créée, on peut voir sur l'exemple de la corde de Melde que ce point se déplace très faiblement par rapport au reste de la corde on fait donc comme hypothèse qu'il ne se déplace pas : $s(0,t) = S_m(\cos(\omega_i t + \phi_i) + r\cos(\omega_r t + \phi_r)) = 0$. Cette relation est donc vraie en particulier lorsque $t = 0$, ainsi elle doit vérifier $s(0,0) = S_m(\cos\phi_i + r\cos\phi_r) = 0$. Le choix de l'origine des phases étant arbitraire on peut fixer $\phi_i = 0$ et donc une solution possible est $r = -1$ et $\phi_r = 0$.

Nous devons toujours vérifier que $s(0,t) = S_m(\cos(\omega_i t) - r\cos(\omega_r t)) = 0$, ceci n'est possible que si les pulsation sont égales $\omega_i = \omega_r$.

✍ Superposition d'une onde incidente et réfléchie dans une corde vibrante

L'onde présente dans la corde s'exprime par

$$s(x,t) = S_m(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)) = 2S_m\sin(\omega t)\sin(kx) .$$

Comme dans le cas des interférences entre deux ondes planes progressives harmoniques, on observe le découplage des coordonnées spatiales et temporelles.

✍ Onde stationnaire

Un onde stationnaire est une onde dont l'expression peut s'écrire comme le produit d'un terme spatial et d'un terme temporel

$$s(M,t) = s(x,t) = f(x)g(t)\ .$$

Une onde stationnaire présente des noeuds (point où l'amplitude de l'onde est toujours nulle) et des ventres (points ou l'amplitude de l'onde est maximal).

✍ Noeuds d'une onde stationnaire

Dans le cas de la corde vibrante, les noeuds d'une onde stationnaire se trouve aux points x_0 tels que $\sin(kx_0) = 0$.

✍ Ventre d'une onde stationnaire

Dans le cas de la corde vibrante, les ventre d'une onde stationnaire se trouve aux points x_0 tels que $\sin(kx_0) = \pm 1$.

2.3 Modes de vibration de la corde de Melde

La corde de Melde est une corde vibrante fixée à ses deux extrémités. La condition limite $s(0,t) = 0$ a déjà été utilisée pour déduire l'expression d'une onde stationnaire. Utilisons donc la seconde condition limite $s(L,t) = 0$ avec L la longueur de la corde.

$$\begin{aligned}\sin(kL) = 0 &\iff k_n L = n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{N}\\ &\iff \frac{2\pi}{\lambda_n}L = n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{N}\\ &\iff \lambda_n = \frac{2L}{n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*\end{aligned}$$

Remarque : On peut également l'écrire sous la forme $\lambda_n = \dfrac{2L}{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

✍ Condition d'existence

Une onde stationnaire existe sur la corde de Melde si et seulement

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

Seuls les ondes stationnaires dont la longueur d'onde vérifie la relation précédente existent. On parle de modes de vibration de la corde de Melde. On peut réécrire les caractéristiques de l'onde ainsi

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}\ ;\ k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L}\ ;\ \omega_n = ck_n = \frac{n\pi c}{L}\ ;\ T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2L}{nc}\ .$$

✍ Modes de vibration de la corde de Melde

Les modes de vibration de la corde de Melde s'expriment

$$s_n(M,t) = s_n(x,t) = 2S_m \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\ ;$$

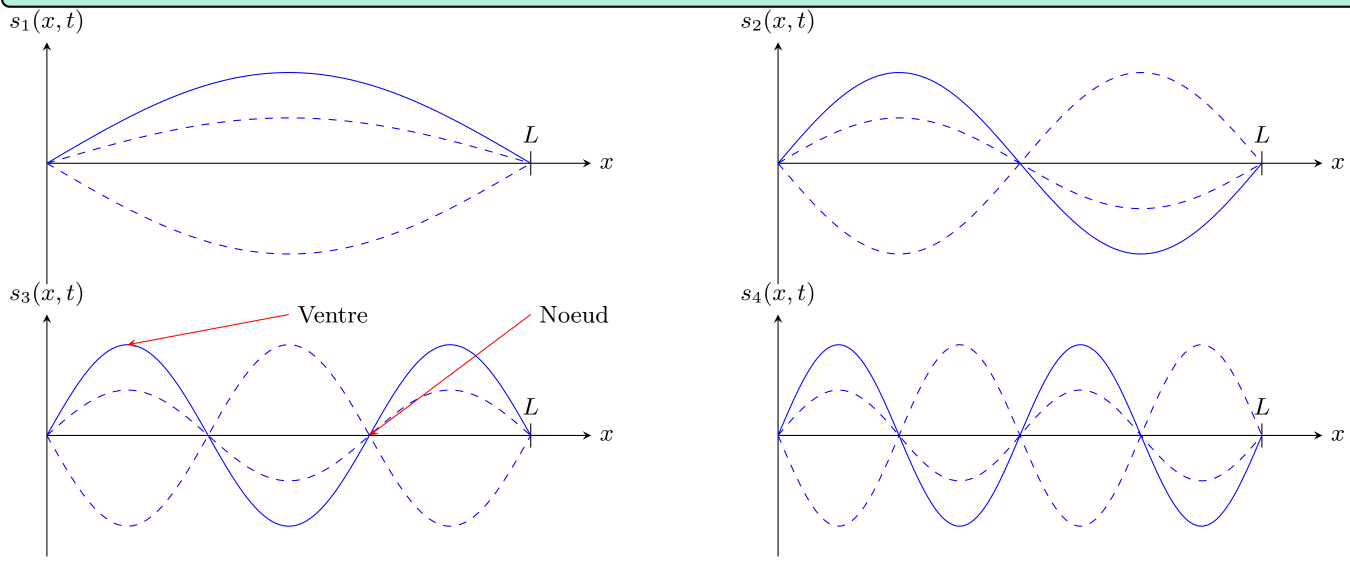


FIGURE 2 – Représentation des 4 premiers modes de vibration de la corde de Melde

✍ Modes de vibration

Un mode de vibration est une onde stationnaire harmonique : tous les points du système vibrent sinusoïdalement à la même fréquence, soit en phase soit en opposition de phase.
Dans un milieu de dimension finie, les conditions aux limites conduisent à une quantification des modes de vibration : seul un ensemble discret de pulsation est accessible $\{\omega_{n\in\mathbb{N}^*}\}$.
Les modes de vibrations sont caractérisés par des pulsations multiples de la pulsation fondamentale ω_1. Les modes de vibrations tels que $n > 1$ sont appelées les harmoniques du mode fondamental $n = 1$.

✍ Modes propres
On appelle les modes propres d'un systèmes les modes de vibrations qui apparaissent lorsque l'on soumet le système à une perturbation quelconque. Dans la plupart des cas les modes propres et les modes de vibrations sont identiques, ce qui n'est pas trivial de prime abord.

✍ Principe de superposition
Une vibration quelconque peut s'exprimer comme la superposition des modes propres du système étudié :

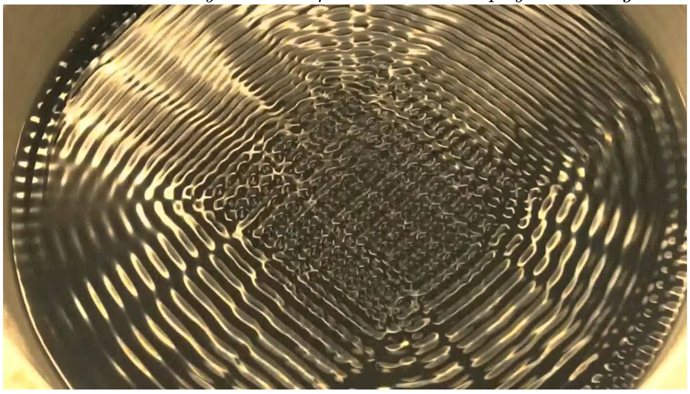
$$s(M,t) = s(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{m,n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct + \phi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) .$$

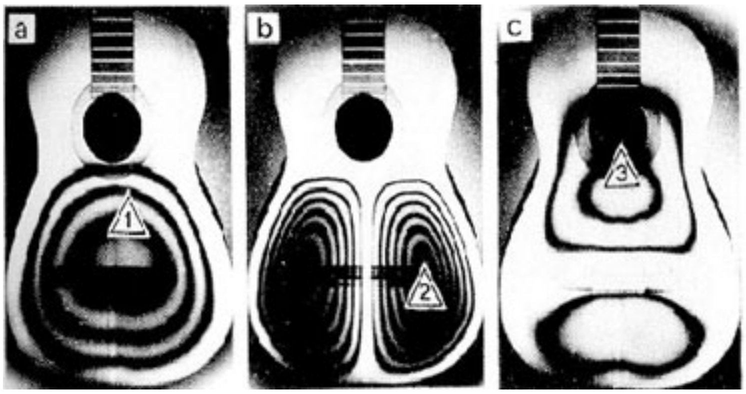
? **TD03 – Ex2**

2.4 Ondes stationnaires en dimensions supérieures

Instabilité de Faraday (1831)

Michael Faraday 1791–1842 : chimiste et physicien anglais





Remarque : La caisse de résonance d'une guitare acoustique est le siège d'ondes stationnaires engendrées par la vibration des cordes. C'est la vibration de ce caisson qui rend plus facilement audible les sons émis par les cordes.

III Retour sur la diffraction : principe de Huygens–Fresnel

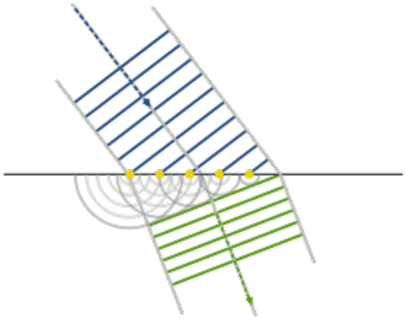
✍ Principe du Huygens–Fresnel
Chaque point d'un front d'onde primaire peut être considéré comme une source secondaire émettant une onde de même fréquence que l'onde primaire. Le front d'onde à un instant postérieur est le résultat de la somme des ondes sphériques émises par toutes les sources secondaires.

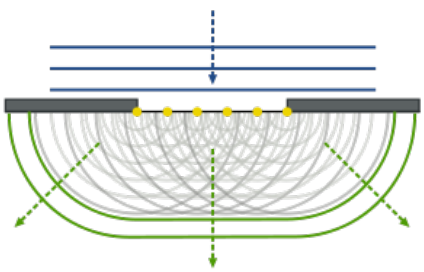
Remarque : Ainsi le phénomène de diffraction (et plus généralement la propagation d'une onde) peut être vu comme le résultat de l'interférence d'une infinité d'ondes issues de sources secondaires.

Christan Huygens 1629–1695 : mathématicien, physicien et astronome hollandais

Augustin Fresnel 1788–1827 : physicien et opticien français

A chaque instant tout point du front d'onde peut être considéré comme une source secondaire émettant une onde sphérique (si on travaille en 3D). Un peu de calcul nous permettrait de montrer que la somme d'une infinité de sources ponctuelles émettant des ondes sphériques abouti à une onde plane. C'est pour cela que dans le cas de la cuve à onde, au centre de la grande ouverture l'onde est localement plane mais l'absence de sources au delà de l'ouverture entraine un effet de bord et donc une onde non plane (front d'onde courbé et transmission suivant certains angles uniquement). De même dans le cas de la petite ouverture cela conduit à l'apparition d'une onde omnidirectionnelle.





Formulaire – Chapitre 03 : Superposition d'ondes

- La somme de deux ondes progressives harmoniques monochromatique fait apparaitre des sommes de fonctions trigonométriques

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

- Le calcul d'intensité ($I = s^2$) fait apparaitre des produits de fonctions trigonométriques

$$\cos p \times \cos q = \frac{1}{2}\left(\cos\left(p+q\right) + \cos\left(p-q\right)\right)$$

- Dans certains cas, les détecteurs sont trop lent pour extraire l'information d'un signal et réalisent la moyenne temporelle des signaux reçus

$$\langle\cos(\omega t + f(x) + \phi)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega t + f(x) + \phi)\mathrm{d}t = 0$$

$$\left\langle\cos^2(\omega t + f(x) + \phi)\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + f(x) + \phi)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

avec T la période temporelle du signal.