

CHAPITRE 23 Statique des fluides

Pressure pushing down on me
Pressing down on you no man ask for
Under pressure, Queen & David Bowie (1985)

Bibliographie

- ⚡ Cap Prépa Physique MPSI–PCSI–PTSI, Pérez, 2013 → Chapitre 19
- ⚡ Cours PCSI, N. Valade → Chapitre 29

Ce chapitre porte sur l'étude des forces de pression apparaissant sur et/ou dans un fluide dans un référentiel galiléen. La statique des fluides se limite à l'étude d'un fluide macroscopiquement au repos, ici dans un référentiel galiléen. Les outils que nous allons introduire ici nous permettront également d'expliquer des phénomènes tels que la poussée d'Archimède.

I Pression dans un fluide

1.1 Généralités

La pression est un problème historiquement lié à celui de la pompe aspirante décrit par Héron d'Alexandrie, mais il faudra attendre le XVII^{ème} siècle pour voir des progrès sur la question en occident et des savant tels Toricelli (l'inventeur du baromètre) ou Pascal pour décrire la pression comme liée au poids de l'air sur le fluide étudié.

⚡* Héron d'Alexandrie I^{er} siècle : ingénieur, mathématicien et mécanicien grec

⚡* Evangelista Toricelli 1608–1647 : physicien et mathématicien italien

⚡* Blaise Pascal 1623–1662 : philosophe, physicien et mathématicien français

Différents développements sont poursuivis au cours du XVII^{ème} siècle mais la description de la pression des fluides reste purement empirique. C'est seulement entre le XVIII^{ème} et XIX^{ème} siècle que la théorie cinétique des fluides moderne se développe sous l'influence de Bernoulli dans un premier temps puis Boltzmann.

⚡* Daniel Bernoulli 1700–1782 : physicien, mathématicien et médecin suisse

⚡* Ludwig Boltzmann 1844–1906 : physicien et mathématicien autrichien



Plusieurs unités coexistent pour décrire la pression

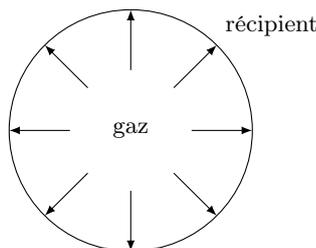
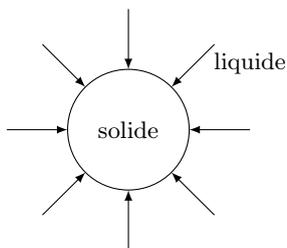
- le pascal (Pa)
- le bar (bar)
- le millimètre de mercure ou Torr
- le mètre de colonne d'eau (mCE)
- l'atmosphère (atm)

$$1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa} \simeq 750 \text{ mm de mercure} \\ \simeq 10.2 \text{ mCE} \simeq 0.987 \text{ atm} .$$

- Pression au centre du Soleil 3.5×10^{11} bar
- Pression au centre de la Terre 3.8×10^6 bar
- Record de pression réalisée en laboratoire 1.3×10^6 bar
- Pression de formation d'un diamant 1×10^5 bar
- Pression dans la fosse des Mariannes 1×10^3 bar
- Pression dans une bouteille de plongée en aluminium 200 bar
- Pression atmosphérique sur Vénus 90 bar
- Pression dans une bouteille de champagne 5 bar
- Pression atmosphérique au niveau de la mer 1.013 25 bar
- Pression sur la Lune 1×10^{-14} bar
- Pression du milieu interstellaire 1×10^{-20} bar

⚡ Constats expérimentaux

Tout fluide exerce sur les surfaces avec lesquelles il est en contact une force pressante perpendiculaire à la dite surface.



- Un fluide est constitué de particules, ce sont les chocs entre ces particules qui vont être à l'origine du phénomène de pression. Elle est définie plus particulièrement en moyennant les effets de ces chocs dans le temps.
- On constate que la pression dans un fluide au repos dépend uniquement de la profondeur et est indépendante de l'orientation du capteur. Au sein d'un fluide au repos la pression a pour origine le poids de la colonne de fluide située au dessus du volume étudié.

1.2 Champ scalaire et pression

⚡ Champ scalaire

Le champ d'une grandeur physique, par exemple la pression p , dans un domaine \mathcal{D} de l'espace à un instant t est défini par la donnée de la fonction $p(M, t)$ en tout point M du domaine \mathcal{D} .

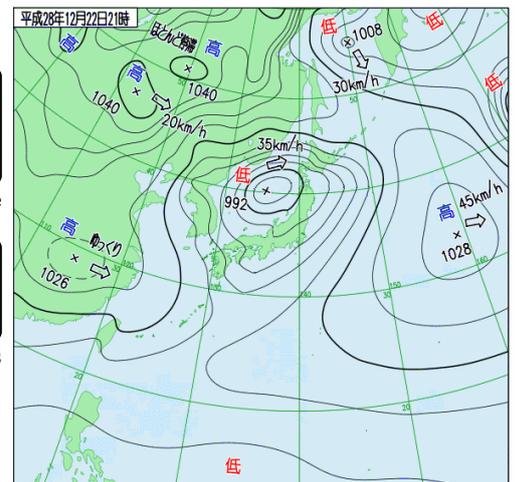
Le champ de pression est ici une fonction réelle de quatre variables (trois d'espace et une de temps).

⚡ Propriétés des champs

- Un champ indépendant de l'espace est dit uniforme.
- Un champ indépendant du temps est dit permanent ou stationnaire.

Remarque : la température ou encore la masse volumique peuvent être décrites par des champs scalaires.

Sur la carte ci-contre, les courbes noires représentent les lignes isobares.



1.3 Pression exercée par un fluide sur un solide

La pression est intuitivement reliée à l'effet d'une force sur une paroi, ainsi on définit les forces de pression comme des forces surfaciques.

Force surfacique

Soit un fluide de pression uniforme $p(M) = p_0$ alors la résultante des forces de pression exercée par ce fluide sur une surface solide plane d'aire S est

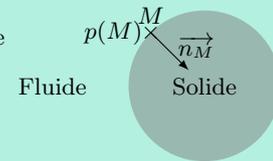
$$\vec{F} = p_0 S \vec{n} ;$$

avec \vec{n} le vecteur unitaire orthogonal à la surface et dirigée du fluide vers le solide. La pression est homogène à une force par unité de surface exprimée en Pa ou N m^{-2} .

Force surfacique élémentaire

Soit un fluide de pression non uniforme $p(M)$ alors la résultante des forces de pression exercée par ce fluide sur la surface solide élémentaire dS_M centrée en M est

$$d\vec{F} = p(M) dS_M \vec{n}_M .$$



Lorsqu'un fluide est en contact avec une surface il exerce une action de pression qui résulte de la somme des actions de contact élémentaire que le fluide exerce sur la surface.

Résultante des actions de pression

Un fluide exerce une force élémentaire sur un élément infinitésimal de surface dS_M centré en un point M comme décrit précédemment. La résultante des actions de pression s'écrit

$$\vec{F} = \iint_{M \in S} d\vec{F}(M) = \iint_{M \in S} p(M) d\vec{S}_M .$$

Remarque : Le calcul de la résultante des actions de pression dans un cas quelconque peut être fastidieux, il est primordial de s'intéresser aux symétries et invariances du problème afin de réduire l'ampleur du calcul de la résultante (voir plus tard sur l'exemple du barrage).



Fiche méthode : Calcul de la résultante des forces de pression

On souhaite calculer la résultante des forces de pression exercée par un fluide sur une surface S d'un solide.

- Déterminer le champ de pression $p(M)$, dans le fluide, en tout point M de la surface.
- Choisir le système de coordonnées adapté au problème et exprimer l'élément de surface dS_M sur la paroi.
- En déduire la force de pression élémentaire $d\vec{F}_p(M) = p(M) dS_M \vec{n}$, avec \vec{n}_M le vecteur unitaire dirigé du solide vers le fluide.



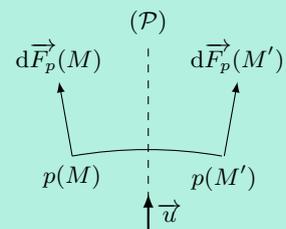
Attention au sens de la force par rapport au sens du vecteur unitaire (vérifier le sens physique).

- Étudier les symétries du problème et en déduire, à l'aide d'un schéma, la direction de la résultante des forces de pression $\vec{F}_p = F_p \vec{u}$. S'aider d'un schéma pour déterminer la direction à partir des symétries.

Symétrie

On dit que le problème admet un plan de symétrie (\mathcal{P}) si

- la surface solide est symétrique par rapport au plan (\mathcal{P}) ,
- et si la pression est la même en M et M' symétriques par rapport au plan (\mathcal{P}) .

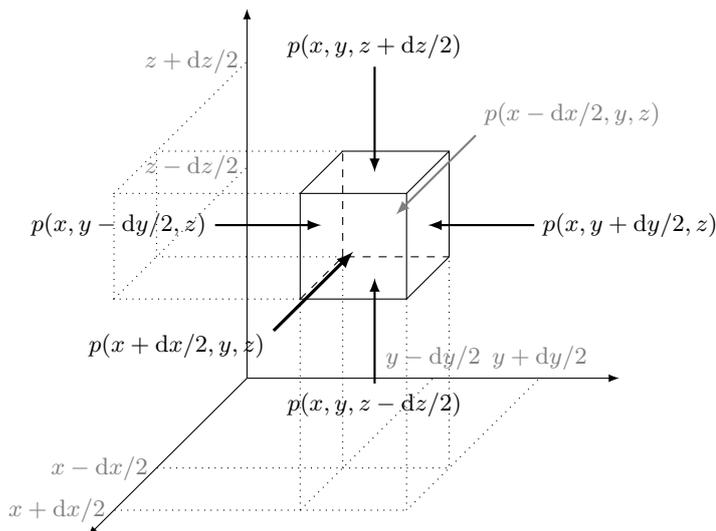


- Exprimer la projection de la résultante des forces de pression sur la direction déterminée par symétrie

$$F_p = \vec{F}_p \cdot \vec{u} = \iint_{M \in S} d\vec{F}_p(M) \cdot \vec{u} = \iint_{M \in S} p(M) dS_M \vec{n}_M \cdot \vec{u} .$$

- En déduire le vecteur \vec{F}_p .

1.4 Équivalent volumique des actions de pression : pression au sein d'un fluide



En partant de la définition de la force de pression (surfactive) précédente, nous allons exprimer la résultante des actions de pression subie par une particule fluide mésoscopique de volume $d\tau = dx dy dz$ centrée en (x, y, z) au sein du fluide. La résultante des forces de pression s'écrit comme la somme des contributions pour chacune des faces,

$$\begin{aligned} d\vec{F}_p &= p\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) dy dz \vec{e}_x - p\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) dy dz \vec{e}_x \\ &+ p\left(x, y - \frac{dy}{2}, z\right) dx dz \vec{e}_y - p\left(x, y + \frac{dy}{2}, z\right) dx dz \vec{e}_y \\ &+ p\left(x, y, z - \frac{dz}{2}\right) dx dy \vec{e}_z - p\left(x, y, z + \frac{dz}{2}\right) dx dy \vec{e}_z \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \vec{e}_x - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz \vec{e}_y - \frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz \vec{e}_z \\ &= -\vec{\text{grad}}(p) d\tau. \end{aligned}$$

➤ Actions de pression subies par une particule fluide

La résultant des actions de pression exercées par le reste du fluide sur un élément de volume mésoscopique $d\tau$ s'écrit

$$d\vec{F}_p = -\vec{\text{grad}}(p) d\tau.$$

Ainsi les actions de pressions sont des actions de contact décrites par des **forces surfaciques** dont la résultante sur un volume $d\tau$ est décrite par une **force volumique**. On peut définir la densité volumique de force, exprimée en N m^{-3} , par

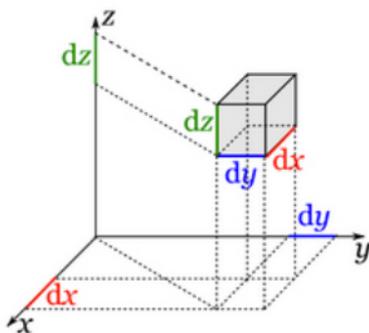
$$\frac{d\vec{F}_p}{d\tau} = -\vec{\text{grad}}(p).$$

Remarque : Cette relation se généralise à tous les systèmes de coordonnées, on peut par exemple faire la démonstration en coordonnées cylindriques.

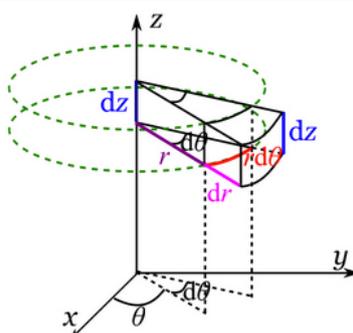
$$\begin{aligned} d\vec{F}_p &= p\left(r - \frac{dr}{2}, \theta, z\right) \times \left(r - \frac{dr}{2}\right) d\theta \cdot dz \vec{u}_r - p\left(r + \frac{dr}{2}, \theta, z\right) \times \left(r + \frac{dr}{2}\right) d\theta \cdot dz \vec{u}_r + p\left(r, \theta - \frac{d\theta}{2}, z\right) \vec{u}_\theta \left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) \times dr \cdot dz \\ &- p\left(r, \theta + \frac{d\theta}{2}, z\right) \vec{u}_\theta \left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) \times dr \cdot dz + p\left(r, \theta, z - \frac{dz}{2}\right) \times dr \cdot rd\theta \vec{u}_z - p\left(r, \theta, z + \frac{dz}{2}\right) \times dr \cdot rd\theta \vec{u}_z \\ &= -\left[p\left(r + \frac{dr}{2}, \theta, z\right) - p\left(r - \frac{dr}{2}, \theta, z\right)\right] rd\theta \cdot dz \vec{u}_r - \left[p\left(r + \frac{dr}{2}, \theta, z\right) + p\left(r - \frac{dr}{2}, \theta, z\right)\right] \frac{dr}{2} d\theta \cdot dz \vec{u}_r \\ &- \left[p\left(r, \theta + \frac{d\theta}{2}, z\right) \vec{u}_\theta \left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) - p\left(r, \theta - \frac{d\theta}{2}, z\right) \vec{u}_\theta \left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right)\right] dr \cdot dz \\ &- \left[p\left(r, \theta, z + \frac{dz}{2}\right) - p\left(r, \theta, z - \frac{dz}{2}\right)\right] \times dr \cdot rd\theta \vec{u}_z \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r}(r, \theta, z) \times dr \cdot rd\theta \cdot dz \vec{u}_r - 2p(r, \theta, z) \times \frac{dr}{2} \cdot d\theta \cdot dz \vec{u}_r - \frac{(\partial p \vec{u}_\theta)}{\partial \theta}(r, \theta, z) \times dr \cdot d\theta \cdot dz - \frac{\partial p}{\partial z}(r, \theta, z) \times dr \cdot rd\theta \cdot dz \vec{u}_z \\ &= -\left[\frac{\partial p}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z\right] \times dr \cdot rd\theta \cdot dz - \left[p \vec{u}_r - p \frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \theta}\right] \times dr \cdot d\theta \cdot dz \\ &= -\vec{\text{grad}}(p) d\tau \text{ car } \frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{u}_r. \end{aligned}$$

? Faire la démonstration en coordonnées volumiques (pas facile)

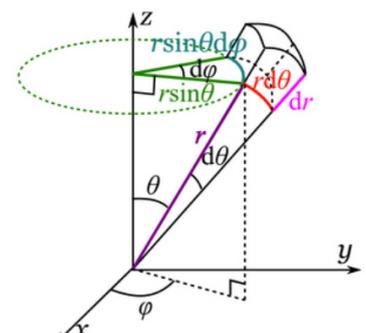
Indication : $\vec{\text{grad}}X = \frac{\partial X}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial X}{\partial \phi} \vec{u}_\phi$.



$$d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$$



$$d\tau = dr \cdot r d\theta \cdot dz$$



$$d\tau = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin(\theta) d\phi$$

II Statique des fluides dans un champ de pesanteur uniforme

2.1 Relation fondamentale de la statique des fluides

Considérons un fluide au repos dans le champ de pesanteur terrestre d'intensité \vec{g} . Étudions le comportement d'une particule fluide de volume mésoscopique $d\tau$ et masse volumique ρ dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les forces subies par la particule sont la pression exercée par le fluide ainsi que son poids.

Relation fondamentale de la statique des fluides

Appliquons la deuxième loi de Newton à la particule fluide, on obtient la relation

$$m \vec{a} = \rho d\tau \vec{a} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p)d\tau + \rho d\tau \vec{g} ;$$

qui devient pour une particule au repos

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(p) + \rho \vec{g} = \vec{0} .$$

Remarque : L'opérateur gradient fait intervenir les dérivées partielles spatiales, en coordonnées cartésiennes il s'écrit

$$\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z .$$

Remarque : La relation fondamentale de la statique des fluides est une équation locale, i.e. au voisinage d'un point donné du fluide. Ainsi la relation précédente est valable même si p , ρ et \vec{g} ne sont pas uniformes.

2.2 Champ de pression dans un fluide incompressible

L'expérience nous montre que la masse volumique au sein d'un liquide (et plus généralement un fluide incompressible) peut être considérée comme constante et que le champ de pression ne dépend que de la profondeur. De plus, faisons l'hypothèse que le champ de pesanteur terrestre est uniforme. Sous ces hypothèses, la relation fondamentale de la statique des fluides devient

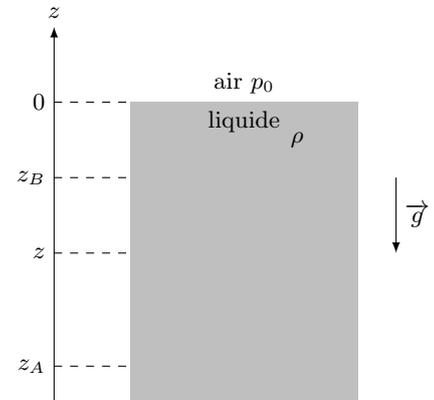
$$\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z = -\rho g \vec{e}_z \Rightarrow dp = -\rho g dz .$$

Considérons deux points A et B de profondeur différente. Ainsi, après intégration on obtient

$$p(z_B) - p(z_A) = -\rho g(z_B - z_A) .$$

Le liquide possède une surface dite libre en contact avec l'atmosphère terrestre à la pression p_0 , utiliser cette condition limite permet d'obtenir l'expression de la pression au sein du liquide en fonction de la profondeur

$$p(z) = p_0 - \rho g z .$$



Dans ce modèle, la pression au sein d'un fluide incompressible augmente linéairement avec la profondeur. Par exemple pour l'eau, $\rho = 1.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, dans le champ de pesanteur terrestre $g \simeq 10 \text{ ms}^{-2}$ la pression augmente de 1 bar tous les 10 m. La fosse des Mariannes possède une profondeur record de 10911 m, cela correspond dans ce modèle à une pression de 1092.1 bar proche de la valeur mesurée dans les années 60 de 1086 bar.

Remarque : Le 23 janvier 1960, à bord du bathyscaphe Trieste, le Suisse Jacques Piccard, fils d'Auguste Piccard (inventeur du bathyscaphe) et le lieutenant de l'US Navy Don Walsh, atteignent le fond de la fosse à 13h06, après une descente de 4h30.

La pression au sein d'un fluide incompressible ne dépendant que de la profondeur, les surfaces isobares sont des plans horizontaux. Ainsi, la surface libre d'un fluide incompressible au repos est un plan horizontal.

2.3 Modèle de l'atmosphère « isotherme »

On propose ici un modèle simple pour décrire le champ de pression atmosphérique. L'air est supposé être un gaz parfait et vérifie ainsi l'équation d'état des gaz parfaits et la température supposée uniforme T_0 .

$$pV = nRT_0 \Rightarrow p = \frac{n}{V} RT_0 = \frac{nM}{V} \frac{RT_0}{M} = \rho \frac{RT_0}{M} .$$

Ainsi le champ de pression atmosphérique vérifie le système

$$dp = -\rho g dz ; p = \rho \frac{RT_0}{M} .$$

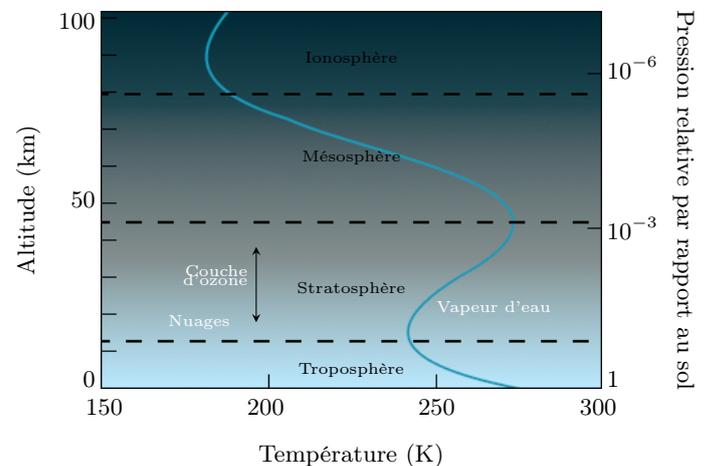
En combinant ces deux relations, on obtient finalement

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT_0} dz .$$

La relation précédente peut s'intégrer comme

$$\ln p(z) - \ln p_0 = -\frac{Mg}{RT_0} (z - z_0) ;$$

avec p_0 la pression atmosphérique à l'altitude de référence z_0 , prenons ici le niveau de la mer ($z = 0$ et $p_0 = 1013 \text{ hPa}$).



➤ Champ de pression de l'atmosphère « isotherme »

Le champ de pression de l'atmosphère « isotherme » est décrit par un profil exponentiel $p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0}z\right)$.

On en déduit aisément l'allure de la masse volumique de l'atmosphère en fonction de l'altitude

$$\rho(z) = \frac{p_0 M}{RT_0} \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0}z\right).$$

Remarque : Ce modèle d'atmosphère est proche de la réalité en ce qui concerne la pression (10% d'erreur à 10 km d'altitude) mais largement critiquable en ce qui concerne la température qui décroît de plusieurs degrés par kilomètre (à 10 km la température est d'environ -50°C).

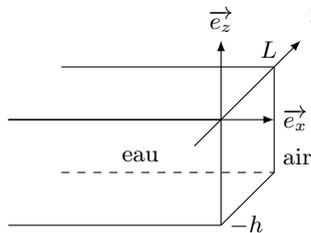
III Conséquences des actions de pression

3.1 Force subies par une paroi

? Force subie par un barrage

On étudie le barrage qui retient l'eau d'un lac. On note p_0 la pression de l'air ambiant et ρ la masse volumique de l'eau. La surface du barrage en contact avec l'eau est un mur plan, rectangulaire vertical, de hauteur h et de largeur L .

- Déterminer la résultante des forces de pression \vec{F}_1 exercée par l'eau sur le barrage.
- Si il n'y avait pas d'eau, quelle serait la force \vec{F}_2 exercée par l'air sur la partie qui devrait être immergée du barrage ?
- La résultante $\vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ représente l'effet net de l'eau sur le barrage. Calculer la norme de cette force ($h = 50.0\text{ m}$, $L = 100\text{ m}$).



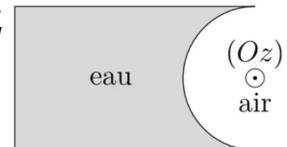
Réponses :

- $\vec{F}_1 = \int_{-h}^0 p(z)(Ldz)\vec{e}_x = \dots = \left[p_0 Lh + \frac{1}{2}\rho g Lh^2\right]\vec{e}_x$.
- $\vec{F}_2 = \int_{-h}^0 p_0 Ldz\vec{e}_x = p_0 Lh\vec{e}_x$.
- $\vec{F} = \frac{1}{2}\rho g Lh^2\vec{e}_x$ de norme $F = 1.2 \times 10^9\text{ N}$.

? Force subie par une vitre hémicirculaire

La vitre d'un aquarium a la forme d'un demi-cylindre d'axe vertical, de hauteur h et de rayon R . L'eau affleure au sommet de la vitre. On note ρ la masse volumique constante de l'eau liquide, g le champ de pesanteur et p_0 la pression atmosphérique à la surface de l'eau.

- Quel est le système de coordonnées adapté ?
 - Exprimer la pression au sein de l'eau et la pression au sein de l'air en un point de la surface.
 - Écrire l'élément de surface dS_M dans le système de coordonnées choisi précédemment.
 - En déduire la force de pression exercée sur l'élément de surface dS_M . On n'oubliera pas de préciser le vecteur unitaire.
 - En déduire l'expression de la résultante des forces de pression s'exerçant sur la paroi à l'aide d'une intégrale double.
- Remarque : Le calcul de l'intégrale précédente ne peut pas être fait directement à cause de la présence du vecteur unitaire $\vec{u}_r(\theta)$ qui dépend de la position à la surface de l'aquarium.
- Déterminer un plan de symétrie du problème. Tracer sur un schéma les forces $d\vec{F}_p(M)$ et $d\vec{F}_p(M')$ qui s'exercent en deux points M et M' symétriques par rapport au plan de symétrie précédent. Quelle est la direction de la somme $d\vec{F}_p(M) + d\vec{F}_p(M')$? En déduire la direction de la résultante des forces de pression.
 - Projeter la résultante des forces de pression dans la direction déterminée précédemment, puis calculer l'intégrale. Faire l'application numérique pour une vitre de même taille que dans le cas précédent.



3.2 Poussée d'Archimède

Considérons un corps solide de géométrie simple, par exemple un cylindre vertical, immergé dans un fluide incompressible. Nous savons que la pression interne au fluide est uniquement dépendante de la profondeur et que les actions de pression sont orientées de façon normale à l'interface fluide/solide. Ainsi, les composantes latérales se compensent. Seules les actions de pression exercées sur la face inférieure et supérieure du cylindre ne se compensent pas.

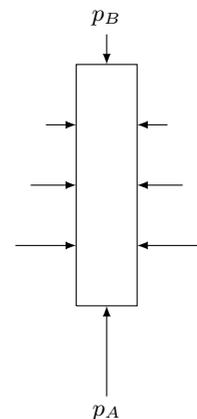
De plus la pression s'écrit $p(z) = p_0 - \rho g z$, ainsi la résultante des actions de pression s'écrit

$$\vec{F} = p_A S \vec{u}_z - p_B S \vec{u}_z = (p_A - p_B) S \vec{u}_z ;$$

avec p_A la pression exercée sur la face inférieure du cylindre et p_B celle exercée sur la face supérieure. La résultante des forces subies par ce solide peut se réécrire

$$\vec{F} = \rho_f (z_B - z_A) S g \vec{u}_z = \rho_f V g \vec{u}_z ;$$

avec ρ_f la masse volumique du fluide et V le volume de fluide déplacé. Ce résultat obtenu sur une géométrie simple se généralise à tout corps tout ou partiellement immergé.



➤ Poussée d'Archimède

La résultante des actions de pression exercées par un fluide sur un solide qui y est immergé est égale à l'opposé du poids de la portion de fluide déplacé par ce solide.

3.3 Facteur de Boltzmann

Partons de la relation obtenue lors de l'étude de l'atmosphère « isotherme ».

$$\rho(z) = \frac{p_0 M}{RT_0} \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0} z\right).$$

L'équation d'état du gaz parfait permet d'écrire

$$p_0 V_0 = n_0 RT_0 = \frac{m_0}{M} RT_0 \Rightarrow \frac{p_0 M}{RT_0} = \frac{m_0}{V_0} = \rho_0.$$

D'autre part

$$\frac{Mgz}{RT_0} = \frac{mgz}{nRT_0} = \frac{mgz}{Nk_B T_0} = \frac{mgz/N}{k_B T_0}.$$

On pose l'énergie potentielle microscopique d'une particule $e_p(z) = \frac{mgz}{N}$. Ainsi la masse volumique de gaz présente à l'altitude z s'exprime

$$\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{e_p(z)}{RT_0}\right).$$

⚡ Facteur de Boltzmann

Soit un système thermodynamique à l'équilibre à la température T , dans lequel les énergies prises par les particules peuvent avoir des valeurs différentes E_i . Le nombre moyen N_i de particules ayant l'énergie E_i est proportionnelle au facteur de Boltzmann

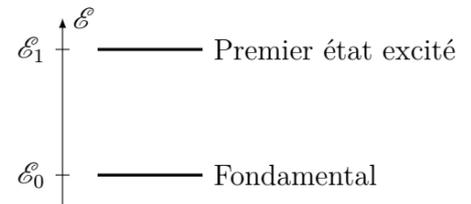
$$N(E_i) = N_i \propto \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right).$$

Remarque : Le terme N_i/N représente la probabilité pour qu'une particule du système soit dans l'état d'énergie E_i . Cette probabilité est proportionnelle au facteur de Boltzmann. Notons que plus E_i est faible, plus le facteur de Boltzmann est élevé. Cela signifie que les états de plus basse énergie sont les plus peuplés.

3.4 Facteur de Boltzmann, pour aller plus loin

Assemblée d'atomes à l'équilibre thermique :

De nombreux systèmes physiques possèdent un comportement pouvant être interprété à l'aide du facteur de Boltzmann : évaporation des liquides, capacité thermique des solides et des gaz, cinétique chimique... Nous allons nous intéresser ici à quelques considérations à la base du fonctionnement des lasers. Considérons une assemblée de N atomes à l'équilibre thermique à la température T . Les niveaux d'énergie des atomes sont quantifiés, comme nous l'avons vu au chapitre 5. La répartition des niveaux d'énergie des atomes est très complexe (par sa géométrie, un atome ne peut pas se modéliser simplement par un puits infini rectangulaire d'énergie potentielle, qui est le cas que nous avons traité en cours), mais on ne s'intéresse ici qu'aux deux niveaux possédant les énergies les plus basses : le niveau fondamental d'énergie \mathcal{E}_0 , et le premier état excité d'énergie \mathcal{E}_1 .



Le facteur de Boltzmann permet d'accéder à la proportion d'atomes dans chacun des deux états. En effet, on peut écrire

$$p_0 = A \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_0}{k_B T}\right) \text{ et } p_1 = A \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_1}{k_B T}\right);$$

où A est une constante. Le nombre N_0 d'atomes dans le niveau fondamental vaut donc $N_0 = p_0 N$ alors que celui dans l'état excité vaut $N_1 = p_1 N$. Ainsi, le rapport du nombre d'atomes dans l'état excité par celui du nombre d'atomes dans l'état fondamental s'écrit

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{p_1}{p_0} = \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0}{k_B T}\right) < 1.$$

L'interprétation est la suivante. En premier lieu, l'état d'énergie la plus basse est davantage peuplé que l'état excité. De plus, pour des basses températures, c'est-à-dire $T \ll \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0}{k_B T}$, le rapport N_1/N_0 est très faible et la quasi-totalité des atomes est dans l'état fondamental. En effet, l'énergie typique d'agitation thermique $k_B T$ est insuffisante pour fournir à des atomes le saut d'énergie $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0$ leur permettant de passer dans l'état excité. En revanche, si $T \gg \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0}{k_B T}$, l'agitation thermique est très importante et les atomes sont répartis équitablement entre les deux niveaux d'énergie.

Application aux LASER :

Afin que des photons soient émis par cette assemblée d'atomes, il est important que le plus grand nombre possible d'atomes soient dans l'état excité, l'atome pouvant se désexciter en émettant un photon, et que très peu d'atomes soient dans l'état fondamental afin d'empêcher l'absorption du faisceau laser dans la cavité. C'est ce qu'on appelle l'inversion de population. L'étude précédente montre que cette situation est impossible pour une assemblée d'atomes à l'équilibre thermodynamique. Il est alors nécessaire de se placer en dehors de l'équilibre thermodynamique en réalisant une opération appelée pompage, permettant d'exciter un grand nombre d'atome. Ce pompage peut être réalisé par une excitation lumineuse (source lumineuse classique à incandescence, à l'intérieur de la cavité laser) ou électrique. Cette approche du fonctionnement des lasers est très sommaire. Elle a néanmoins le mérite d'expliquer la nécessité d'un pompage.

