

Introduction au monde quantique

–And the winner is number 3, in a quantum finish.

–No fair! You changed the outcome by measuring it!!

Futurama (saison 3, épisode 4, 2001)

Bibliographie

- ♣ Cap Prépa Physique MPSI–PCSI–PTSI, Pérez, 2013 → Chapitre 4
 ♣ Cours PTSI, B. Mollier → Chapitre 17

Newton décrivait la lumière comme un jet de particules ou grains de lumière afin de mettre au point une analogie avec les lois de la mécanique et décrire la lumière en terme de forces. Cependant cette approche ne lui permit pas d'expliquer les phénomènes tels que les interférences ou la diffraction. Ses travaux furent publiés en 1704 dans son ouvrage *Optiks*, Newton étant un scientifique très en vogue à l'époque les approches alternatives (comme les descriptions ondulatoires datant des travaux de Huygens de 1678) furent écartées. Il fallut attendre 1873 pour que des théories ondulatoires reviennent sur le devant de la scène grâce au traité d'électromagnétisme de Maxwell permettant de décrire la propagation de la lumière.

Ces différentes descriptions restent toutefois classiques et ne permettaient pas d'expliquer certaines expériences comme le rayonnement thermique du corps noir (Planck 1900) ou l'effet photoélectrique (Hertz 1887 et Einstein 1905) nécessitant quantification de l'énergie ou une description corpusculaire de la lumière. D'autres expériences plus récentes mirent en évidence le caractère corpusculaire de la lumière tandis que d'autres mirent en évidence le caractère ondulatoire de la matière, il est possible d'observer des interférences ou de la diffraction d'électrons par exemple.

☞* *Max Planck 1858–1947 : physicien allemand et prix Nobel de physique 1918*

☞* *Heinrich Rudolf Hertz 1857–1894 : physicien allemand*

I Aspect corpusculaire de la lumière

1.1 Effet photoélectrique

1.1.1 Expérience de Hertz (1887)

☞ Électroscope

Un électroscope est constitué d'un conducteur déformable. Si le conducteurs porte une charge globale alors il se déforme sous l'effet des interactions électrostatiques.

Certains rayonnement électromagnétique peuvent changer la charge d'un métal : c'est l'effet photoélectrique.

- Si l'électroscope est initialement neutre alors il se charge et les plaques se repoussent. On ne peut savoir si il se charge positivement ou négativement.
- Si l'électroscope est initialement chargé positivement, il ne se passe rien quand : a priori la lumière charge positivement l'électroscope (i.e. arracher des électrons).
- Si l'électroscope est initialement chargé négativement, il se décharge (les électrons excédentaires sont arrachés) puis se charge à nouveau.
- Si une plaque de verre est intercalée entre la source lumineuse et l'électroscope, aucune modification de l'électroscope n'est observée. On en conclut que toutes les radiations ne sont pas capables d'arracher des électrons à un métal.

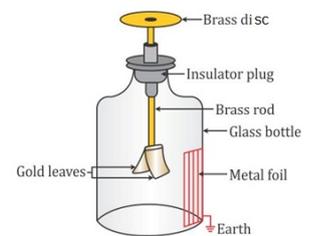


FIGURE 1 – Électroscope

♣ Effet photoélectrique (Hertz 1887)

Un métal exposé à la lumière peut émettre des électrons.

Cette première observation a été réalisée par Heinrich Rudolf Hertz en 1887, cependant il ne peut trouver d'explication à ce phénomène. Il fallut attendre d'autres expériences en 1902 puis une explication d'Einstein en 1905.

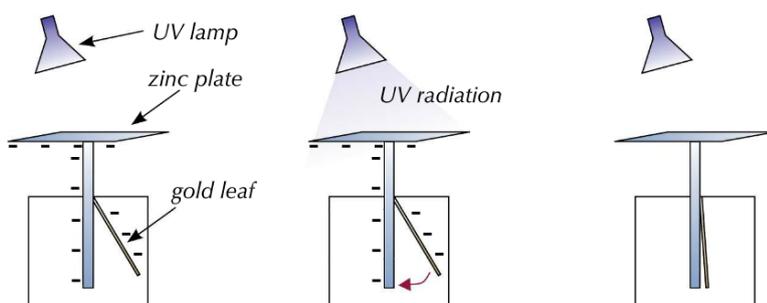


FIGURE 2 – Expérience de Hertz

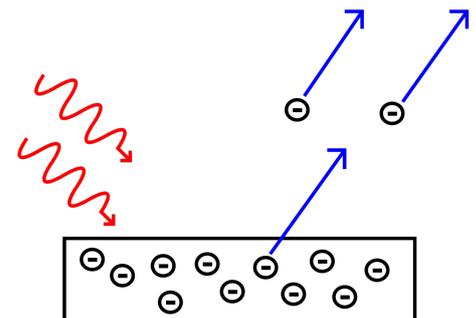
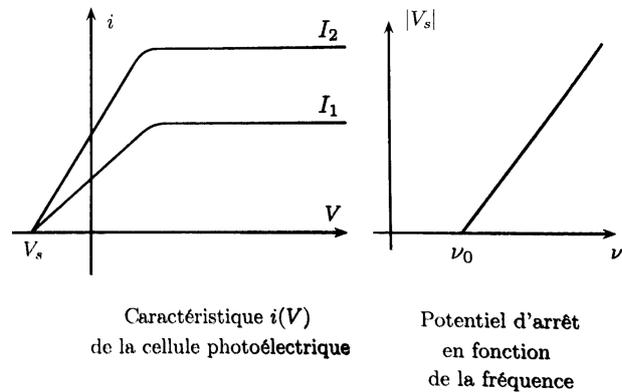
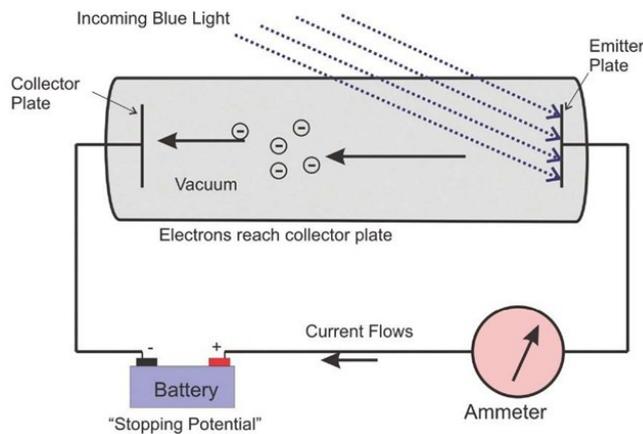


FIGURE 3 – Effet photoélectrique

1.1.2 Expérience de Lenard (1902)

☞* Philipp Lenard 1862–1947 : physicien hongrois (puis allemand) et prix Nobel de physique 1905

Ce montage consiste en deux plaques métalliques placées en vis-à-vis dans un tube à vide. L'une des plaques est éclairée avec de la lumière de fréquence et intensité variable. Les plaques sont reliées à une alimentation de tension réglable permettant de générer un champ électrique dans le tube et de mettre d'éventuels électrons arrachés en mouvement.



Caractéristique $i(V)$ de la cellule photoélectrique

Potentiel d'arrêt en fonction de la fréquence

1. Fréquence seuil

- Pour un métal donné il existe une fréquence seuil ν_0 de la source lumineuse en dessous de laquelle aucun courant électrique n'apparaît. Au dessus de cette fréquence seuil le courant électrique (i.e. le nombre d'électrons arrachés) est proportionnel à l'intensité de la source lumineuse.

2. Potentiel d'arrêt

- Si $V_C > V_E$ alors un champ électrique orienté du collecteur vers l'émetteur apparaît. La force qu'engendre ce champ sur les électrons est $\vec{F} = -e\vec{E}$ et entraîne les électrons vers le collecteur. Au delà d'une certaine tension tous les électrons arrachés par effet photoélectrique atteindront le collecteur.
- On observe une saturation du courant circulant dans le circuit car le nombre d'électron arraché dépend uniquement de l'intensité de la source lumineuse.
- Si $V_C = V_E$ alors seulement certains électrons auront assez d'énergie cinétique pour atteindre le collecteur. Il existe un courant électrique dont l'intensité dépend de la l'intensité de la source lumineuse.
- Si $V_C < V_E$ alors un champ électrique orienté de l'émetteur vers le collecteur apparaît. La force qu'engendre ce champs tend à ramener les électrons sur l'émetteur. Pour une tension suffisamment négative (i.e. un potentiel inférieur au potentiel d'arrêt V_s) plus aucun courant électrique ne circule.
- La valeur du potentiel d'arrêt est indépendante de l'intensité de la source lumineuse.
- En 1914, Robert Millikan montre expérimentale l'existence de la fréquence seuil ν_0 mais également qu'au delà de cette fréquence seuil le potentiel d'arrêt est une fonction affine de la fréquence $V_s = \alpha(\nu - \nu_0)$.

3. L'effet photoélectrique observé est "immédiat" il n'y a pas de décalage temporel entre l'impact de la lumière et l'apparition d'un courant électrique, ce qui permet d'écarter des effet de chargement du système.

☞* Robert Andrews Millikan 1868–1953 : physicien américain

1.1.3 Le photon pour expliquer l'effet photoélectrique

⚡ Caractère corpusculaire de la lumière

La lumière est constitué de particules (les photons) d'énergie $E_\nu = h\nu$.

Avec $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s la constante de Planck, introduite historiquement pour répondre à un autre problème expérimental : le rayonnement du corps noir.

Interprétons maintenant l'effet photoélectrique en partant de cette hypothèse dite du "photon". Lors de l'expérience de Lenard une fréquence lumineuse minimale est nécessaire pour arracher des électrons, ceci peut être relié à la nécessité d'avoir des photons suffisamment énergétique. Soit W_{ext} l'énergie nécessaire pour extraire un électron du métal,

$$W_{ext} = h\nu_0 .$$

Si la lumière utilisé à une fréquence supérieure à la fréquence seuil que devient l'énergie excédentaire? Le plus probable serait que cette énergie soit convertie en énergie cinétique, ainsi l'énergie totale d'un photon peut s'écrire

$$h\nu = W_{ext} + E_c .$$

1.2 Le photon

Afin d'expliquer le rayonnement du corps noir, Planck dut introduire le fait que les échanges d'énergie entre rayonnement et matière se faisait par quantités discrètes qu'il appela quanta. L'introduction de cette quantification de l'énergie fut présentée comme au mieux un artifice de calcul sans aucune nature physique. Ces quanta d'énergie ont pour valeur $E_\nu = h\nu$ avec h la constante de Planck. En 1905, Einstein lui décida de revenir sur cette hypothèse et de l'utiliser pour décrire l'effet photoélectrique.

⚡ Quantum d'énergie

La lumière est composée de quanta d'énergie : les photons. L'énergie d'un quantum est

$$E_\nu = h\nu .$$

La même année Einstein publie également un article traitant de la relativité restreinte où le photon occupe une place privilégiée, il définit ainsi sa quantité de mouvement (ou impulsion) p .

⚡ Le photon

Le photon est une particule sans masse, se déplaçant à la célérité c de la lumière dans le vide, d'impulsion p qui a pour énergie

$$E_\nu = pc .$$

⚡ Relation de Planck–Einstein

Le photon est l'objet permettant de décrire le rayonnement électromagnétique, il a un comportement :

- ondulatoire, caractérisé par une fréquence ν et une longueur d'onde λ ;
- corpusculaire, caractérisé par une énergie E_ν et une quantité de mouvement (ou impulsion) p .

Les relations de Planck–Einstein permettent de relier ces différents comportements,

$$E_\nu = h\nu = \hbar\omega ;$$

$$p_\nu = \frac{h}{\lambda} = \hbar k ;$$

$$\text{avec } \omega = 2\pi\nu, k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ et } \hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

1.3 Interférences photon par photon (2001)

Si l'on envoie des photons un par un sur des fentes d'Young on verra apparaître impact après impact (sur un écran) la figure d'interférences classiquement observée en optique. Cela signifie que l'on peut dire que chaque photon passe par les deux fentes d'Young simultanément et interfère avec lui-même. Cependant si l'on place des détecteurs derrière les fentes d'Young, un photon n'en active qu'un seul : lors de l'observation un photon passe par une unique fente. Dans ce cas on ne verra pas apparaître la figure d'interférence sur l'écran ! Cela peut sembler très surprenant mais en réalité illustre l'effet de la mesure sur un système quantique : sans observation le système quantique se trouve dans une superposition d'états (fente gauche ET fente droite) et aura un comportement quantique ; avec observation l'état est réduit (fente gauche OU fente droite).

†* Angus Young 1955– : guitariste écossais du groupe ACDC... ce n'est pas lui

†* Thomas Young 1773–1829 : mathématicien, physicien et égyptologue britannique

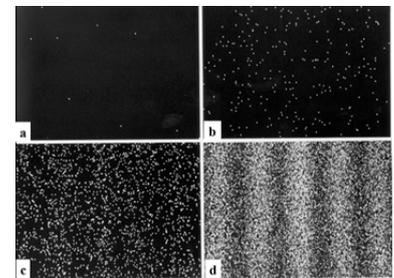


FIGURE 4 – Figures d'interférences photon par photon, créative commons

⚡ Interférences

Les interférences apparaissent lorsqu'un objet quantique peut emprunter plusieurs chemins pour arriver au même détecteur, et que ces chemins sont indiscernables après détection.

Un photon traversant le dispositif va rencontrer l'écran et aboutir à la formation d'une figure d'interférences. Cela signifie que le lieu de l'impact du photon correspond à un tirage aléatoire suivant une loi de probabilité décrivant la figure d'interférences. **Nous avons donc des corpuscule dont la probabilité d'impact est prédictible par un modèle ondulatoire.**

⚡ Interprétations

Cette expérience met en évidence :

- l'aspect probabiliste de la mécanique quantique ;
- la dualité onde–corpuscule de la lumière ;
- l'interaction avec le dispositif expérimental "crée" l'état observé de la mesure.

II Aspect ondulatoire de la matière

2.1 Expérience de Davisson & Germer

Un cible de Zinc bombardée par des électrons entraîne la formation d'une figure de diffraction. Cette expérience nous apporte deux informations :

- les électrons peuvent se comporter comme une onde ;
- les solides présentent une structure microscopique périodique (l'échantillon de zinc peut être décrit comme un réseau).

†* Clinton Davisson 1881–1958 : physicien américain

†* Lester Germer 1896–1971 : physicien américain

†* Paul Scherrer 1890–1969 : physicien suisse

👉 Diffraction d'électrons : expérience de Davisson & Germer

Diffraction d'électrons sur une cible de graphite.

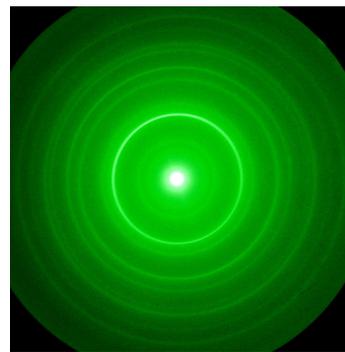
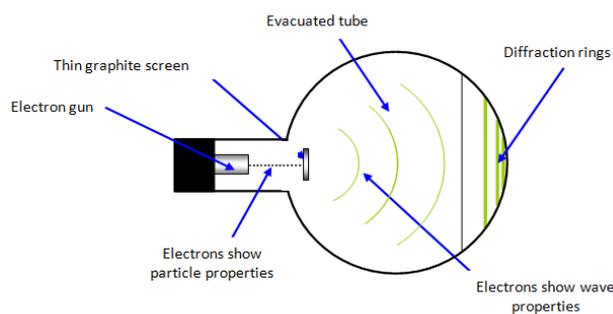


FIGURE 5 – Dispositif de diffraction d'électrons, www.schoolphysics.co.uk

FIGURE 6 – Figure de diffraction d'électrons, www.lambdasys.com

🔍 Interprétation

Cette expérience a permis d'observer que des particules pouvaient avoir un comportement ondulatoire.

2.2 Interférences entre particules

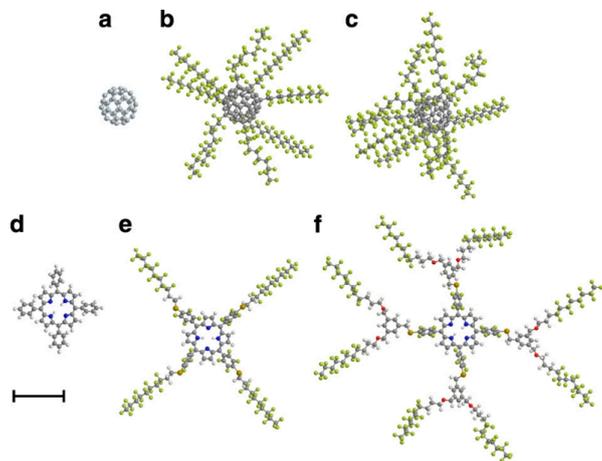


FIGURE 7 – (a) fullerene C₆₀ ($m = 720\text{AMU}$, 60 atoms); (b) The perfluoroalkylated nanosphere PFNS8 (C₆₀[C₁₂F₂₅]₈, $m = 5672\text{AMU}$, 356 atoms) is a carbon cage with eight perfluoroalkyl chains; (c) PFNS10 (C₆₀[C₁₂F₂₅]₁₀, $m = 6910\text{AMU}$, 430 atoms) has ten side chains and is the most massive particle in the set; (d) A single tetraphenylporphyrin TPP (C₄₄H₃₀N₄, $m = 614\text{AMU}$, 78 atoms); (e) TPPF84 (C₈₄H₂₆F₈₄N₄S₄, $m = 2814\text{AMU}$, 202 atoms) and (f) TPPF152 (C₁₆₈H₉₄F₁₅₂O₈N₄S₄, $m = 5310\text{AMU}$, 430 atoms). In its unfolded configuration, the latter is the largest molecule in the set. The scale bar corresponds to 10 Å.

Des expériences d'interférences entre particules ont également été réalisées, pour la première fois avec des électrons en 1956 par Möllenstedt. Plus récemment des interférences ont été réalisées avec des atomes "froids" en 1992 puis des molécules de plus en plus grosse comme le Fullrène (1999) et mêmes des protéines (2011).

†* Göttfried Möllenstedt 1912–1997 : physicien allemand

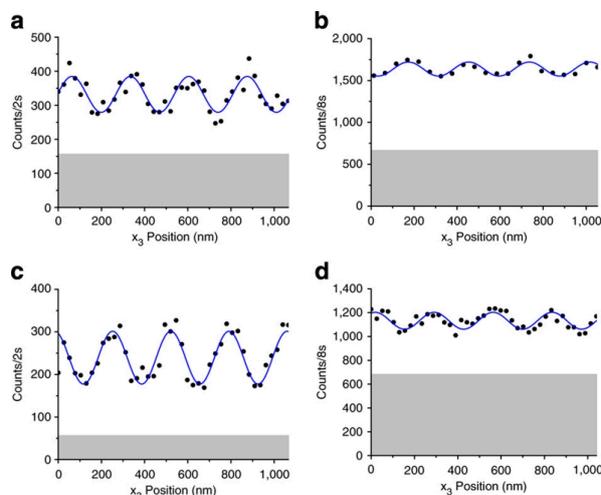


FIGURE 8 – Figure d'interférences. Gerlich et al. Quantum interference of large organic molecules. Nat Commun. 2011 Apr ; 2 : 263. <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3104521/>

2.3 Hypothèses et interprétation

En 1924, Louis De Broglie (prononcé de Breuille suite à la francisation de son nom de famille venant de l'italien De broglia) avance l'hypothèse que la matière pourrait avoir un comportement ondulatoire de la même façon que la lumière peut avoir un comportement corpusculaire. Il introduit ainsi la notion d'ondes de matière.

†* Louis de Broglie 1892–1987 : mathématicien et physicien français

Relations de De Broglie

Un objet matériel (une particule par exemple) d'énergie E et de quantité de mouvement p peut présenter un comportement ondulatoire :

- de fréquence $\nu_{DB} = \frac{E}{h}$;
- de longueur d'onde $\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$.

? Longueurs d'onde de De Broglie, comportement quantique

Humain (75 kg, 4 km h⁻¹), balle de tennis (60 g, 100 km h⁻¹), électron (9.109 × 10⁻³¹ kg, 1 eV).
 $\lambda_{hum} \approx 6.1 \times 10^{-37}$ m, $\lambda_{balle} \approx 3.1 \times 10^{-35}$ m, $\lambda_{e^-} \approx 1.2$ nm

? Atomes "froids"

L'énergie cinétique d'un atome peut s'écrire $E_c = \frac{3}{2}k_B T$. Justifier qu'il faut refroidir des atomes afin de pouvoir observer des comportements quantiques.

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}$$

? Froid, oui. Mais à quel point ?

Estimer la température que doit atteindre le système si on veut observer le comportement quantique d'atomes de carbones $m_C \approx 2 \times 10^{-23}$ g, $r_C \approx 70 \times 10^{-12}$ m, $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J K⁻¹, $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s.

$$\lambda \sim r_C \implies T \sim \frac{h^2}{3m_C k_B r_C^2} \approx 10^2 \text{ K}$$

2.4 Limite relativiste (Hors programme)

La relativité restreinte conduit à l'expression suivante pour l'énergie $E = \gamma mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = E_0 + E_c$, avec $E_0 = mc^2$ l'énergie au repos (ou énergie de masse) et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Ainsi l'énergie cinétique prend l'expression suivante pour de faibles vitesses

$$E_c = (\gamma - 1)mc^2 = (\gamma - 1)\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \underset{v \ll c}{\sim} \frac{p^2}{2m}$$

De plus nous pouvons écrire $p = mv = \sqrt{2mE_c}$. Ainsi, la longueur d'onde de De Broglie devient $\lambda_{DB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}}$.

Remarque : Hors du cadre de la mécanique classique $p \neq mv$! Il faut bien penser à vérifier si $v \ll c$.

Plus généralement $p = \gamma mv$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v/c}}$.

2.5 Application : la microscopie électronique

La limitation principale de la microscopie optique est due à la diffraction de la lumière sur les échantillon de taille de l'ordre de la longueur d'onde ($\lambda \simeq 600$ nm). L'utilisation d'électron permet de passer cette barrière de la centaine de nanomètre : un électron à une longueur d'onde de De Broglie de l'ordre du nanomètre, ce qui permet de former des images d'objets beaucoup plus petits et/ou d'avoir plus de détails qu'en microscopie optique.



FIGURE 9 – Ver hydrothermal (largeur photo 568 μm)

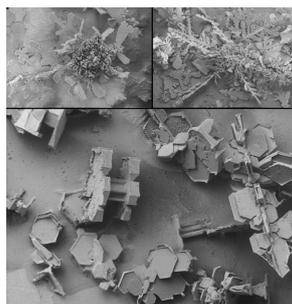


FIGURE 10 – Flocons de neige



FIGURE 11 – Fibre tissée

2.6 Construction ad hoc d'une onde de matière

? Construction d'une onde de matière

1. Soit une particule de quantité de mouvement \vec{p} . Quelle est l'expression de sa longueur d'onde de De Broglie ? Et de son vecteur d'onde ?
2. Relier l'énergie \mathcal{E} d'une telle particule et sa pulsation ω .
3. Une onde plane 1D complexe s'écrivant $\underline{\psi} = \psi_0 e^{i(\omega t - kx)}$ donner l'expression d'une telle onde en fonction de \mathcal{E} et \vec{p} .

Toute onde peut a priori se décomposer comme une superposition d'ondes progressives harmoniques monochromatiques. Or, la mécanique quantique nécessite de travailler avec des ondes complexes. Du haut de ces deux constats on peut introduire une onde permettant de décrire le comportement d'un objet quantique.

⚡ Onde de De Broglie

L'onde associée à une particule quantique libre se propageant suivant la direction \vec{u}_x s'écrit

$$\underline{\psi} = \psi_0 e^{i(\omega t - kx)} = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}t - px)} ;$$

avec la pulsation $\omega = 2\pi\nu$, le vecteur d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, l'énergie $\mathcal{E} = h\nu$ et la quantité de mouvement (ou impulsion) $p = \frac{h}{\lambda}$.

Il est possible de construire une équation vérifiée par l'expression de l'onde de De Broglie et ainsi obtenir un outil permettant d'étudier la dynamique d'un objet quantique.

⚡ Équation de Schrödinger (Hors programme)

L'onde de De Broglie vérifie l'équation suivante

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) ;$$

avec $V(\vec{r}, t)$ l'énergie potentielle associée aux forces conservatives s'appliquant à l'objet quantique et Δ le laplacien (dérivée seconde par rapport aux coordonnées spatiales).

Remarque : L'expression et la résolution de cette équation sont hors programme.

†* Erwin Schrödinger 1887–1961 : physicien autrichien

III Interprétation probabiliste

3.1 Amplitude de probabilité

Nous avons vu avec l'expérience des interférences photon par photon que l'on ne peut prédire avec certitude l'endroit d'impact d'une particule quantique, la physique quantique n'est pas déterministe. Cependant nous pouvons construire des outils probabilistes afin d'en décrire le comportement dans son ensemble. A priori la position d'impact d'une particule sur un écran suit une loi de probabilité correspondant à un comportement ondulatoire.

Par analogie avec l'optique, on définit l'amplitude de probabilité complexe notée $\underline{\psi}$. En optique la figure d'interférence correspond à l'intensité lumineuse \mathcal{I} de la superposition des ondes incidentes d'amplitude \mathcal{E} avec $\mathcal{I} = |\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2|^2$.

⚡ Fonction d'onde

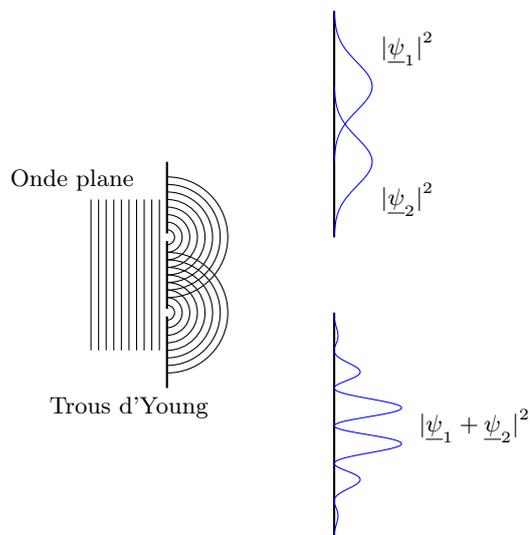
L'état physique d'un objet quantique est parfaitement défini par une fonction d'onde complexe $\psi(M, t)$ qui représente l'amplitude de probabilité. La probabilité de présence d'un objet quantique est proportionnelle à l'amplitude de probabilité au carré

$$\mathcal{P}(M, t) = |\underline{\psi}(M, t)|^2 .$$

La probabilité pour qu'un objet quantique se trouve dans un volume dV autour du point M à l'instant t est $dP = |\underline{\psi}(M, t)|^2 dV$. Si on intègre sur tout l'espace dans lequel un objet quantique peut se trouver on obtient une probabilité de présence $\iiint |\underline{\psi}(M, t)|^2 dV = 1$.

Remarque : La fonction d'onde d'une particule peut être identifiée à l'expression d'une onde qu'avait intuité De Broglie lorsqu'il a travaillé sur le caractère ondulatoire de la matière. Tout objet de nature quantique peut être décrit par une telle fonction d'onde dont le comportement se rapproche de celui d'une onde classique, ainsi les résultats que nous connaissons sur les ondes peuvent s'appliquer à la mécanique quantique en considérant non plus la propagation d'une perturbation du milieu mais la propagation d'une amplitude de probabilité.

3.2 Interprétation probabiliste d'une expérience



⚡ Chemins discernables

Dans un dispositif tel que les chemins sont discernables on n'observe pas d'interférences car l'objet quantique n'emprunte qu'un unique chemin connu de l'observateur. Soit $\underline{\psi}_1$ l'amplitude de probabilité correspondant au passage par la fente 1 et $\underline{\psi}_2$ celle correspondant au passage par la fente 2. Ainsi les impacts suivent la probabilité de présence suivante

$$\mathcal{P} \propto |\underline{\psi}_1|^2 + |\underline{\psi}_2|^2.$$

⚡ Chemins indiscernables

Dans un dispositif tel que les chemins sont indiscernables on observe des interférences car l'objet quantique passe par ces différents chemins. Soit $\underline{\psi}_1$ l'amplitude de probabilité correspondant au passage par la fente 1 et $\underline{\psi}_2$ celle correspondant au passage par la fente 2. Ainsi les impacts suivent la probabilité de présence suivante

$$\mathcal{P} \propto |\underline{\psi}_1 + \underline{\psi}_2|^2.$$

FIGURE 12 – Probabilité de présence pour des chemins discernables ou non

Tant que l'objet quantique n'a pas atteint l'écran sa position est aléatoire mais respecte une distribution de probabilité que l'on peut déterminer. Mathématiquement l'objet quantique est réparti dans la portion de l'espace où sa densité de probabilité est non nulle. Après impact sur l'écran sa position est connue, la mesure modifie de façon notable l'état de la particule quantique. De même si l'on observe chacune des fentes d'Young, les particules quantiques ne sont plus "délocalisées" entre les deux fentes mais empruntent un unique chemin ce qui détruit les interférences.

⚡ Postulat de la réduction du paquet d'onde

Si l'on mesure une grandeur physique quantique d'un système dans une superposition d'état (ex : interférences en chemins indiscernables), le système est immédiatement projeté dans un sous-état qui n'est pas une superposition (ex : particule passe par la fente de droite).

⚡ Principe de complémentarité de Bohr

Les aspects ondulatoire (interférences) et corpusculaire (la particule passe par une fente donnée) ne peuvent être observés simultanément.

☞* Neils Bohr 1885–1962 : physicien danois et prix Nobel de physique 1922

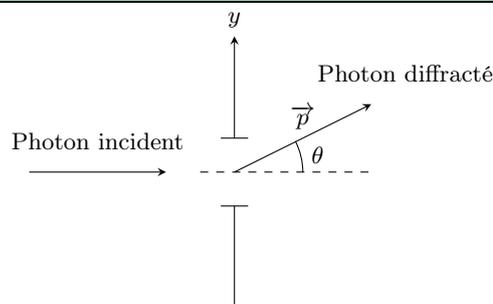
IV Principe d'indétermination de Heisenberg

☞* Werner Heisenberg 1901–1976 : physicien allemand

4.1 Indétermination quantique

⚡ Abandon de la notion de trajectoire

Dans une approche classique il est possible de connaître avec exactitude la position et la vitesse d'une particule, cela revient à dire que l'on peut décrire de façon exacte la trajectoire d'une particule. Si l'on considère un objet quantique cela n'est plus possible car la particule n'est plus décrite en tant que telle mais décrite par une amplitude de probabilité ayant le comportement d'une onde.



Soit un photon traversant le trou diffractant. Sa position est aléatoire pouvant être décrite par la densité de probabilité du photon au niveau du trou de diffraction. Si l'on mesurait sa position avec précision il serait localisé quelque part au niveau du trou. Si l'on répète cette mesure sur de nombreux photons on observerait une répartition respectant la densité de probabilité. La largeur à mi-hauteur de cette densité de probabilité correspond à l'indétermination de position du photon. Dans notre cas cette indétermination vaut $\Delta y = \frac{a}{2}$ car on considère uniquement des photons diffractés qui se trouvent donc quelque part dans le trou de diffraction.

FIGURE 13 – Expérience de diffraction

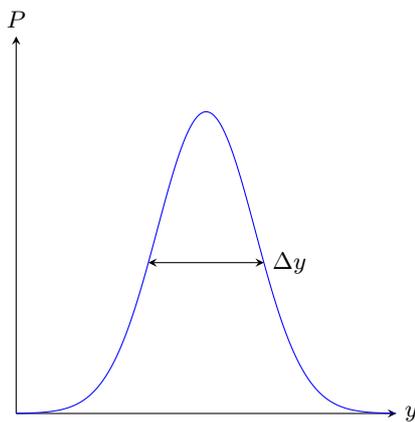


FIGURE 14 – Densité de probabilité d'un photon au niveau du trou de diffraction

La connaissance d'une trajectoire classique passe par la connaissance de la position et de la vitesse, essayons donc d'exprimer l'indétermination portant sur la vitesse. La vitesse est directement reliée à la quantité de mouvement en mécanique classique $\vec{p} = m\vec{v}$, exprimons donc l'indétermination portant sur la quantité de mouvement d'un photon. Pour cela il faut commencer par exprimer la quantité de mouvement.

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} \implies p_y = \frac{h}{\lambda} \sin \theta ;$$

Or p_y est uniquement dû à la diffraction, il s'agit purement d'une indétermination $p_y = \Delta p_y$. De plus, l'angle de diffraction est décrit par la relation $\sin \theta \sim \lambda/a$. L'indétermination de quantité de mouvement devient

$$\Delta p_y \sim \frac{h}{a} .$$

Ainsi nous pouvons exprimer le produit de l'indétermination de position et de vitesse

$$\Delta y \times \Delta p_y \sim h/2 .$$

Forcer le photon à passer par une fente revient à contraindre, et donc mieux connaître, sa position. Ainsi l'indétermination sur sa quantité de mouvement augmente d'autant que l'on diminue la largeur de la fente. Ce résultat est cohérent avec les observations usuelles d'optique : plus le trou de diffraction est petit plus l'onde lumineuse est diffractée.

⚡ Indétermination

La nature quantique d'un objet nous empêche de connaître précisément à la fois sa position et sa vitesse.

⚡ Principe d'indétermination de Heisenberg

La mesure à un instant donné de la position x (resp. y et z) et de l'impulsion p_x (resp. p_y et p_z) d'un objet quantique est contrainte par les indéterminations fondamentales Δx et Δp_x (resp. Δy , Δp_y et Δz , Δp_z) vérifiant

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} ; \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} ; \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} ;$$

$$\text{avec } \hbar = \frac{h}{2\pi} \text{ la constante réduite de Planck.}$$

Ne pouvant connaître la position et la vitesse d'un objet quantique avec exactitude, la notion de trajectoire perd tout son sens.

⚡ Moyenne & Écart type

La moyenne de x notée $\langle x \rangle$ est reliée à l'écart type Δx par la relation

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} .$$

4.2 Application à un problème simple : l'oscillateur harmonique quantique

L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique classique (ex : un système masse/ressort) est $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ avec k la constante de raideur du ressort. La valeur minimale de cette énergie mécanique correspond à la position de repos du système ($p = 0$, $x = 0$) donc $E_{m,0} = 0$.

Admettons que l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique quantique ait la même expression $\mathcal{E}_m = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. D'après le principe d'indétermination de Heisenberg, la position et l'impulsion ne peuvent être connues de façon exacte et donc être simultanément nulles. Ainsi, la valeur minimale de l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique quantique ne peut être nulle.

Une mesure donne accès à un état possible du système, c'est donc la valeur moyenne effectuée sur un grand nombre d'expérience qui pourra s'interpréter. Calculons la valeur moyenne de l'énergie mécanique

$$\langle \mathcal{E}_m \rangle = \frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \langle x^2 \rangle .$$

L'oscillateur harmonique est un problème symétrique (i.e. solutions symétriques) donc la moyenne de la position x et de l'impulsion p_x sont nulles donc $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$. Le principe d'indétermination de Heisenberg permet d'écrire $\langle p_x^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4 \langle x^2 \rangle}$ et donc

$$\langle \mathcal{E}_m \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m \langle x^2 \rangle} + \frac{1}{2} m \omega^2 \langle x^2 \rangle = f(\langle x^2 \rangle).$$

Cherchons un minimum de la fonction $f(u)$, i.e. $\frac{df}{du} = 0$ et $\frac{d^2f}{du^2} > 0$.

On trouve comme solution $u_0 = \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}$.

⚡ Oscillateur harmonique quantique

L'énergie moyenne d'un oscillateur harmonique quantique vérifie toujours la relation $\langle \mathcal{E}_m \rangle \geq \mathcal{E}_{m,0} = \frac{\hbar\omega}{2}$ où $\mathcal{E}_{m,0}$ est l'énergie de l'état fondamental du système.

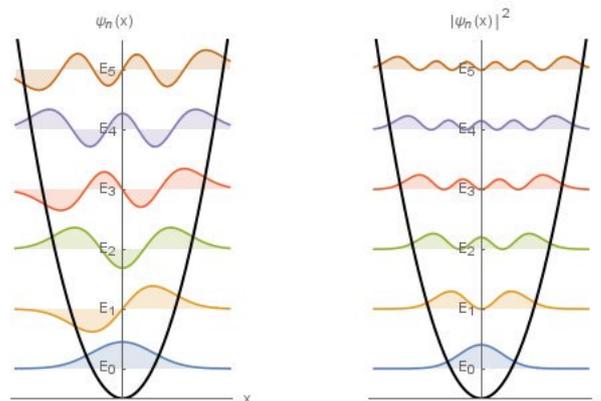


FIGURE 15 – Amplitude de probabilité et probabilité de présence d'un oscillateur harmonique quantique pour les 6 premiers niveaux d'énergie.

V Confinement d'une particule libre

5.1 Particule libre

Une particule est dite libre si elle peut sans déplacer sans contrainte suivant une ou plusieurs dimensions. Dans la suite nous considérerons des particules libres 1D libres de se déplacer suivant l'axe \vec{u}_x . L'énergie mécanique d'une telle particule comporte un unique terme cinétique

$$\mathcal{E}_m = \frac{p^2}{2m}.$$

Nous pouvons reformuler cette quantité en utilisant les relations de De Broglie.

⚡ Énergie mécanique d'une particule libre

L'énergie mécanique d'une particule libre 1D s'écrit

$$\mathcal{E}_m = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{h^2\nu^2}{2mc^2} = \frac{\hbar^2\omega^2}{2mc^2} = \frac{\hbar^2k^2}{2m}.$$

Cette quantité peut prendre n'importe quelle valeur réelle positive.

L'énergie cinétique étant parfaitement connue, l'impulsion l'est également $\Delta p_x = 0$. Ainsi une particule libre de se déplacer est totalement délocalisée et pourrait se trouver n'importe où dans l'espace $\Delta x \rightarrow \infty$.

5.2 Confinement d'une particule

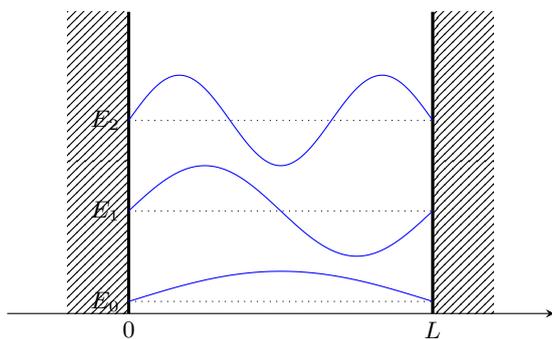


FIGURE 16 – Amplitude de probabilité des 3 premiers niveaux d'énergie.

Considérons une particule confinée dans une boîte allant des abscisses $x = 0$ à $x = L$. La particule ne pouvant sortir de cette boîte, cette dernière peut être modélisée par un potentiel tel que

$$V(x) = 0 \text{ si } 0 \leq x \leq L \\ V(x) \rightarrow \infty \text{ si } x \leq 0 \text{ ou } L \leq x.$$

Une particule ne peut pénétrer une zone de potentiel infini, ainsi la particule étudiée est contrainte de rester dans l'intervalle $[0, L]$.

Un objet quantique peut être décrit par une amplitude de probabilité ayant le comportement d'une onde. La particule ne pouvant sortir de la boîte, son amplitude de probabilité est nulle en dehors de la boîte et sur ses bords. Nous avons déjà vu un problème similaire : l'amplitude de vibration de la corde de Melde est nulle sur les bords $x = 0$ et $x = L$. Ce problème de mécanique quantique est finalement analogue à un corde vibrante fixées en ses deux extrémités.

⚡ Particule confinée dans une boîte

La fonction d'onde est stationnaire et vérifie

$$\psi(x) = 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0] \cup [L, +\infty[.$$

Les modes accessibles sont quantifiés tels que

$$\lambda_n = \frac{2L}{n+1} \text{ avec } n \in \mathbb{N} .$$

L'énergie mécanique totale d'une particule confinée dans une boîte s'écrit $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m\lambda^2}$ car dans la boîte le potentiel est nul. Il n'existe que des modes discrets de longueur d'onde discrète, ainsi les énergies des modes sont également discrètes.

⚡ Énergie d'une particule confinée

Le confinement spatial d'une particule conduit à une quantification de son énergie, toutes les valeurs ne sont pas accessibles mais prennent des valeurs discrètes

$$\mathcal{E}_n = \frac{\hbar^2}{2m\lambda_n^2} = (n+1)^2 \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \text{ avec } n \in \mathbb{N} .$$

De plus le niveau fondamental a une énergie non nulle conformément au principe d'indétermination de Heisenberg

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 .$$

⚡ Configuration des modes

Les modes supérieurs au mode fondamental présentent des noeuds d'amplitude de probabilité. On observe donc des régions de la boîte dans laquelle la particule quantique ne peut se trouver. Un nouveau résultat différant d'un problème classique.