Sciences Physiques et Chimiques

Devoir Maison 04 : Capteur résistif de température

À rendre le 22 novembre 2019

1 Variation de la résistance d'une thermistance en fonction de la température

La résistance R d'une thermistance, formée d'un matériau semi–conducteur, varie avec la température absolue T, suivant la loi $R = R_0 \exp\left(\dfrac{B}{T} - \dfrac{B}{T_0}\right)$ où B, $R_0 = 12\text{k}\Omega$ et $T_0 = 298\text{K}$ sont des constantes.

1. Que représente la constante R_0 ?

2. Exprimer le coefficient de température $\alpha = \dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}$ en fonction de B et T.

3. Calculer B sachant que $\alpha(T = 298\text{K}) = -4,135.10^{-2}\text{K}^{-1}$.

4. Calculer R aux température 0°C et 100°C.

5. Le coefficient de dilatation linéaire du semi–conducteur est $\lambda = \dfrac{1}{l}\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}T} = 10^{-5}\text{K}^{-1}$. La résistance est définie par $\rho = R \times S/l$ avec ρ la résistivité du matériau, S la section du matériau et l la longueur du matériau.

a. Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}\ln R}{\mathrm{d}T}$ en fonction des dérivées de $\ln\rho$, $\ln l$ et $\ln S$.

b. La dilatation est dite isotrope (i.e. la variation de S est égale à la variation de l^2). Relier les variations de $\ln S$ à λ.

c. En déduire une relation entre les variations de résistance avec la température dues à la variation de la résistivté d'une part et aux variations de dimensions (caractérisées par λ) d'autre part.

d. Quel paramètre, entre la variation de résistivité et la variation des longueurs, influence le plus fortement les variations de résistance ?

2 Montage potentiométrique

Pour mesurer une température, on utilise un capteur résistif. On mesure un signal électrique, en générale une tension, qui traduit les variations de la résistance avec la température. Un montage, alimenté par une source de tension comprend la résistance à mesurer et d'autres résistances constantes. Le circuit de mesure ainsi constitué est appelé conditionneur du thermomètre. On considère le montage potentiométrique ci–dessous. Le générateur a pour f.e.m. E et pour résistance interne r. Le voltmètre possède une résistance interne R_d mesure la tension v_1 aux bornes de la résistance thermométrique R qui dépend de T.

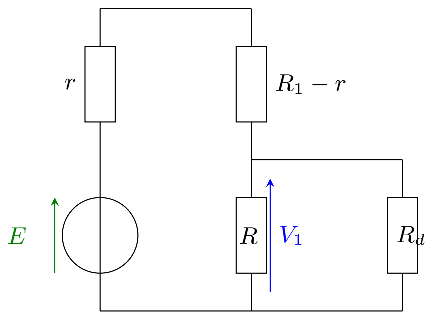


FIGURE 1: Montage potentiométrique

6. Exprimer V_1 en fonction de R_1, R, R_d et E.

7. Comment doit–on choisir R_d pour que la tension V_1 ne dépende pas du voltmètre utilisé ? Quelle est alors l'expression de V_1 ? On suppose cette condition désormais réalisée.

<u>Indication :</u> Prendre une valeur arbitraire pour un paramètre ne rend pas sa dépendance négligeable. On cherchera une limite rendant un paramètre négligeable devant un autre, par exemple $R_d \ll R$ ou $R_d \gg R$.

8. À $T = T_0$, la résistance thermométrique R a pour valeur R_0 et la tension de mesure la valeur V_1. Ces conditions définissent un point moyen de fonctionnement.

Lorsque R varie de ΔR (i.e. $R = R_0 + \Delta R$), V_1 varie de ΔV_1 (i.e. $V_1 = V_1 + \Delta V_1$).

Exprimer ΔV_1 en fonction de ΔR, R_0, R_1 et E en se limitant au cas où $\Delta R \ll R_0$.

<u>Indication :</u> On admettra que l'on peut écrire $\dfrac{1}{R_0 + R_1 + \Delta R} \sim \dfrac{1}{R_0 + R_1}\left(1 - \dfrac{\Delta R}{R_0 + R_1}\right)$ si $\Delta R \ll R_0$

9. On définit la sensibilité du conditionneur par $S = \dfrac{\Delta V_1}{\Delta R}$.

Montrer que l'on peut mettre la sensibilité sous la forme $S = \dfrac{E}{\left(\frac{R_0}{\sqrt{R_1}} + \sqrt{R_1}\right)^2}$.

Pour quelle valeur de R_1, cette sensibilité est–elle maximale au voisinage de $T = T_0$? Calculer cette sensibilité maximale.

10. Application numérique : sachant que $E = 10,0\text{V}$, $R_0 = 109,8\Omega$, $r = 20\Omega$, que le voltmètre peut déceler une variation $|\Delta V_1|$ de 0,01V ; calculer la valeur de $R_1 - r$ qui donne la sensibilité maximale et la variation ΔR que l'on peut alors détecter.

11. Alors que le conditionneur est tel que sa sensibilité est maximale, la f.e.m. E du générateur fluctue entre $E - \Delta E$ et $E + \Delta E$. Calculer la variation de V_1 correspondant à une variation ΔE de E. Comparer l'influence de ΔR et de ΔE. Quel est le niveau tolérable de fluctuation de la f.e.m. de la source dans ce dispositif ?

3 Pont de Wheatstone

Le voltmètre, de résistance interne R_d très supérieur aux autres résistances, mesure la différence de potentiel $V_2 = V_B - V_A$. La résistance interne de la source est négligeable. Le montage considéré dans cette partie est représentée sur la figure suivante.

12. Exprimer V_2 en fonction de E et des résistances du montage.

13. L'équilibre du pont ($V_2 = 0$) est réalisé pour $R = R_0$, $T = T_0$. Quelle relation lie alors R_2, R_3, R_4 et R_0 ?

14. Calculer V_2 en fonction de R, R_2, R_0 et E.

15. On suppose $\Delta R = R - R_0 \ll R_0$. Pour quelle valeur de R_2 la sensibilité $S = \dfrac{\Delta V_2}{\Delta R}$ est–elle maximale ? Calculer celle–ci.

16. Comparer la sensibilité du pont de Wheatstone et du montage potentiométrique si :

- le voltmètre n'est utilisé que sur le calibre immédiatement supérieur à E.

- les calibres plus petits sont utilisés.

17. La sensibilité maximale étant obtenue, on tient maintenant compte des fluctuations de E ($|\Delta E| \ll E$). Comparer l'influence respective de ΔR et de ΔE sur V_2. Conclure.

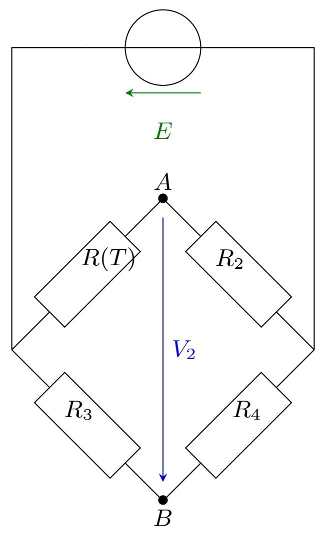


Figure 2: Pont de Wheatstone

DM 03 : Correction

1 Variation de la résistance d'une thermistance en fonction de la temépratur (/5)

1. R_0 correspond à la résistance pour $T = T_0$ (/.5)

2. Calculons la dérivée

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T} = R_0 \frac{-B}{T^2} \exp\left(\frac{B}{T} - \frac{B}{T_0}\right) = -\frac{B}{T^2} R$$

Alors

$$\alpha = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T} = -\frac{B}{T^2} \ (1)$$

3.

$$B = -\alpha T^2 = 4,135.10^{-2} \times 298^2 \approx 3.67 \times 10^3\,\mathrm{K} \ (/.5)$$

4.

$$R(0^\circ\mathrm{C}) \approx 37\,\mathrm{k}\Omega \ (/.5)$$

$$R(100^\circ\mathrm{C}) \approx 1.0\,\mathrm{k}\Omega \ (/.5)$$

5. **a.** D'après l'énoncé $R = \rho l / S$ donc en passant au ln puis en dérivant par rapport à la température on obtient

$$\frac{\mathrm{d}\ln R}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}\ln\rho}{\mathrm{d}T} + \frac{\mathrm{d}\ln l}{\mathrm{d}T} - \frac{\mathrm{d}\ln S}{\mathrm{d}T} \ (/.5)$$

b. La dilatation est isotrope, cela signifie que la variation de S est égale à la variation de l^2 (et de même pour leurs logarithmes respectifs). Une variation s'apparente à une dérivée, ainsi

$$\frac{\mathrm{d}\ln S}{\mathrm{d}T} = 2\frac{\mathrm{d}\ln l}{\mathrm{d}T} = 2\frac{\mathrm{d}l}{l}\frac{1}{\mathrm{d}T} = 2\lambda (/.5)$$

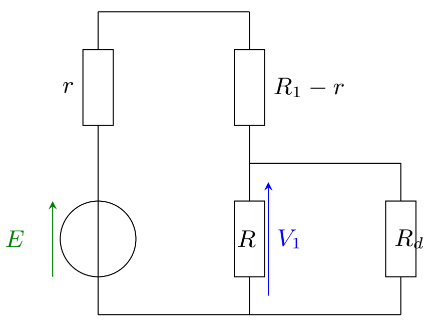
c. Alors

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\ln R}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}\ln\rho}{\mathrm{d}T} + \frac{\mathrm{d}\ln l}{\mathrm{d}T} - \frac{\mathrm{d}\ln S}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}\ln\rho}{\mathrm{d}T} - \lambda (/.5)$$

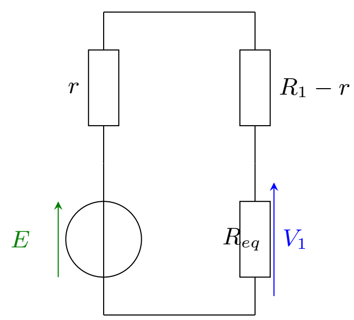
d. $\alpha \approx 10^{-2}$ et $\lambda \approx 10^{-5}$, ainsi la variation de la résistance est essentiellement due à la variation de la résistivité $\frac{\mathrm{d}\ln\rho}{\mathrm{d}T} \approx 10^{-2}$. (/.5)

2 Montage potentiométrique (/9)

Toujours faire un schéma au début d'un exercice de physique, cela vous permet de rapidement poser vos définitions (courant, tension...).



$\Longleftrightarrow$



avec $R_{eq} = \dfrac{RR_d}{R + R_d}$

6. On cherche à déterminer la tension V_1 aux bornes de $R \parallel R_d$, on reconnait un pont diviseur de tension

$$V_1 = \frac{\frac{RR_d}{R+R_d}}{\frac{RR_d}{R+R_d} + R_1} E \ (/1)$$

7. Si la résistances vérifient $R_d \gg R$ alors $R + R_d \sim R_d$, ainsi la tension exprimée à la question précédente se simplifie en

$$V_1 \sim \frac{R}{R + R_1} E \ (/1)$$

8. La tension précédente prend la valeur $V_1 + \Delta V_1$ si la résistance s'écrit $R = R_0 + \Delta R$

$$V_1 + \Delta V_1 = \frac{R_0 + \Delta R}{R_0 + \Delta R + R_1} E$$

D'autre part la tension s'écrit V_1 si la résistance s'écrit R_0 alors on peut exprimer la variation de tension par

$$\Delta V_1 = \left(\frac{R_0 + \Delta R}{R_0 + \Delta R + R_1} E - \frac{R_0}{R_0 + R_1} \right) E$$

En utilisant le développement limité introduit par l'énoncé la variation de tension peut se réécrire

$$\Delta V_1 \sim \left(\frac{R_0 + \Delta R}{R_0 + R_1} \left(1 - \frac{\Delta R}{R_0 + R_1} \right) - \frac{R_0}{R_0 + R_1} \right) E \approx \left(\frac{\Delta R}{R_0 + R_1} - \frac{R_0 \Delta R}{(R_0 + R_1)^2} \right) E = \frac{R_1 \Delta R}{(R_0 + R_1)^2} E \ (/1)$$

9. La sensibilité est définie dans l'énoncé et peut se réécrire, en utilisant le résultat de la question précédente

$$S = \frac{\Delta V_1}{\Delta R} = \frac{E R_1}{(R_0 + R_1)^2} = \frac{E}{\left(\frac{R_0}{\sqrt{R_1}} + \sqrt{R_1} \right)^2} (/1)$$

La sensibilité est maximale si le dénominateur est minimal, i.e. si $\dfrac{R_0}{\sqrt{R_1}} + \sqrt{R_1}$ est minimal, i.e. pour $R_1 = R_0$ (Faire une étude la fonction $f(x) = \dfrac{k}{x} + x$ avec $k = R_0$ et $x = \sqrt{R_1}$). En réinjectant $R_1 = R_0$, on en déduit la sensibilité maximale

$$S_{max} = \frac{E}{4R_0} (/1)$$

10. Pour avoir la sensibilité maximale il faut $R_1 = R_0$, alors

$$R_1 - r = 89,8\Omega \Longrightarrow S_{max} \approx 0,0229\text{V}/\Omega \ (/1)$$

On peut donc obtenir la variation minimale de résistance détectable

$$\Delta R = \frac{\Delta V_1}{S_{max}} \approx 0,44\Omega \ (/1)$$

11. Cette fois on s'intéresse aux variation de V_1 dues à une variation de E à R fixé

$$\Delta V_1 = \frac{R}{R + R_1} \Delta E \ (/.5)$$

Pour avoir une sensibilité maximale, il faut $R_1 = R_0$ d'après la question précédente. De plus on se place au point moyen de fonctionnement alors $R = R_0$, ainsi on obtient $\Delta V_1 = \dfrac{\Delta E}{2}$ (/.5). Pour ne pas dépasser le seuil de détection (fixé à $\Delta V_1 = 0,01$V) les fluctuations de la source doit vérifier $\Delta E < 0,02$V. (/1)

3 Pont de Wheatstone (/5)

Toujours faire un schéma au début d'un exercice de physique, cela vous permet de rapidement poser vos définitions (courant, tension...).

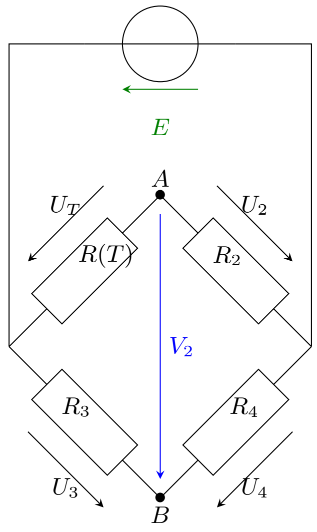


FIGURE 3: Pont de Wheatstone

12. D'après la définition d'une différence de potentiel on peut écrire

$$V_2 = U_T + U_3 = U_2 + U_4$$

On reconnait deux ponts diviseurs de tension

$$V_T = \frac{R(T)}{R(T) + R_2} E \; ; \; V_3 = -\frac{R_3}{R_3 + R_4} E$$

Alors on peut réécrire la tension V_2 de la façon suivante

$$V_2 = \left(\frac{R(T)}{R(T) + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) E \; (/1)$$

13. Le pont est équilibre si $V_2 = 0$, alors

$$\begin{aligned} \left(\frac{R(T)}{R(T) + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) E = 0 &\Longrightarrow \frac{R(T)}{R(T) + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{R(T)}{R(T) + R_2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \\ &\Longleftrightarrow R(T)\left(R_3 + R_4\right) = R_3\left(R(T) + R_2\right) \\ &\Longleftrightarrow R_0 R_4 = R_3 R_2 \; (/.5) \end{aligned}$$

14. La question précédente nous a permis de montrer que $R_3/R_4 = R_2/R_0$, ainsi la tension V_2 déterminée précédemment peut s'écrire

$$V_2 = \left(\frac{R(T)}{R(T) + R_2} - \frac{R_0}{R_0 + R_2} \right) E \; (/.5)$$

15. On retrouve une expression V_2 semblable à l'expression V_1 de la partie précédente (à un terme constant près). On peut soit appliquer la même méthode, soit raisonner par analogie : $\Delta V_2 = V_2(R_0 + \Delta R) - V_2(R_0)$, le terme constant additionnel va se simplifier naturellement et conduire à

$$\Delta V_2 = \frac{R_2 \Delta R}{(R_0 + R_2)^2} E$$

De la même façon qu'à la partie précédente, on peut montrer que la sensibilité est maximale pour $R_2 = R_0$ (pour le justifier faire appelle à la question de la partie précédente et indiquer que la fonction a étudier est la même en remplaçant R_1 par R_2). Ainsi le maximum de sensibilité est à nouveau $S_{max} = \frac{E}{4R_0}$.(/1)
.

16. Si on utilise le même calibre, la sensibilité est identique. Cependant dans le pont de Wheatsone on cherche à mesurer une tension nulle ($V_2 = 0$ si le pont est équiibré) on peut donc diminuer le calibre du voltmètre et gagner en précision.(/.5)

17. On évalue les fluctuations de V_2 (au point de fonctionnement moyen et pour un maximum de sensibilité cf. partie précédente) quand la tension de la source fluctue

$$\Delta V_2 = \left(\frac{R(T)}{R(T)+R_2} - \frac{R_0}{R_0+R_2}\right)\Delta E = \frac{(R(T)-R_0)R_2}{(R(T)+R_2)(R_0+R_2)}\Delta E = \frac{\Delta R \Delta E}{4R_0} \quad (/1)$$

L'influence des fluctuations de la source semblent plus faible car la coefficient n'est pas de $1/2$ mais $\Delta R/4R_0$. (/.5)

Qualité de l'ensemble (/2)