Chapitre 8

Circuit linéaire du premier ordre

You don't know the First Order like I do.
They'll slaughter us. We all need to run.
Finn - Star Wars VII : The Force Awakens (2015)

Bibliographie

✍Cap Prépa Physique MPSI–PCSI–PTSI, Pérez, 2013 $\longrightarrow$ Chapitre 6

Connaissant maintenant les dipoles les plus usuelles ainsi que les lois régissant l'électrocinétique nous pouvons nous attaquer à un vrai problème : le comportement des circuits électriques du 1er ordre. On appelle circuit électrique du 1er ordre des système régi par une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants. Cela concerne les circuits de type RC ou RL, la présence et d'une bobine et d'un condensateur entrainera un comportement d'ordre 2 que nous aborderons ultérieurement. Nous nous concentrons sur le comportement dit transitoire, i.e. juste après avoir ajouté ou levé une contrainte sur le système.

I Notion de régime transitoire

1.1 Définition d'un échelon

✍ Échelon de tension

Un échelon de tension $e(t)$ est défini par

$$e(t) = u_1 \text{ si } t < t_0 \;;$$
$$e(t) = u_2 \text{ si } t > t_0 \;;$$

avec t_0 un instant quelconque, u_1 et u_2 deux constantes différentes.

Dans la suite nous étudierons la réponse de différents circuits électriques à un échelon de tension particulier

$$u(t) = 0 \text{ si } t < 0 \;;$$
$$u(t) = E \text{ si } t > 0 \;.$$

✍ Réponse à un échelon de tension, régime transitoire

Le régime transitoire est l'évolution d'un système soumis à une perturbation de type échelon. La réponse d'un système soumis à un échelon est également appelé réponse indicielle.

✍ Régime permanent

Régime d'un système tel quel les grandeurs physiques le caractérisant sont indépendantes du temps.

1.2 Étude qualitative du circuit RC

La relation courant/tension d'un condensateur est $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, ainsi la tension aux bornes d'un condensateur est continue. Initialement le circuit n'est pas branché à l'alimentation grâce à l'interrupteur et donc $u_c(0) = 0$. Le condensateur s'oppose donc à la variation rapide de la tension à ses bornes. Il faut donc un certain temps pour que la tension imposée par le générateur s'établisse dans le circuit.

La loi des mailles et la relation courant/tension d'une résistance conduisent à $i(t) = \dfrac{1}{R}\left(e(t) - u_C(t)\right)$. L'intensité est nulle avant la fermeture de l'interrupteur et devient brutalement non nulle à la fermeture de ce dernier $i(t = 0^+) = E/R$. L'existence de ce courant est liée à l'apparition de charges sur les armatures du condensateur (il se charge) et ainsi la tension u_C augmente. La charge s'arrête lorsque le courant est nul $i = 0$ et donc $u_C = E$.

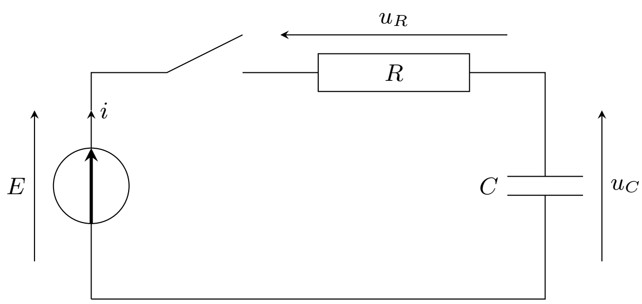


Figure 1 – Circuit RC

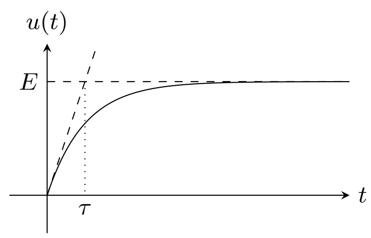


Figure 2 – Charge d'un condensateur

? Temps caractéristique

Déterminer le temps caractéristique associé au circuit RC par une analyse dimensionnelle.
Les grandeurs caractéristiques de ce système sont $[R]$ =V/A, $[C]$ =As/V, $[E]$ =V ; ainsi $\tau \propto R^\alpha C^\beta E^\gamma$ en $\mathrm{V}^{\alpha-\beta+\gamma}\mathrm{A}^{-\alpha+\beta}\mathrm{s}^\beta$.

$$\begin{aligned} \beta &= 1\ ; \\ \alpha - \beta + \gamma &= 0\ ; \\ -\alpha + \beta &= 0\ . \end{aligned}$$

Il existe une unique solution, le temps caractéristique de ce circuit s'exprimer donc par $\tau \propto RC$.

✍ Régime transitoire du circuit RC

- La tension aux bornes du circuit RC est toujours continue.
- La tension initialement nulle croit continument jusqu'à une valeur limite fixée par le générateur E.
- Le temps nécessaire à l'évolution de la tension est de l'ordre du temps caractéristique du circuit $\tau = RC$.

✍ Régime permanent du circuit RC

Après un temps suffisamment long ($t \gg \tau$) la tension aux bornes du condensateur est une constante de valeur E tandis que le courant est nul : c'est le régime permanent.

1.3 Étude qualitative du circuit RL

La relation courant/tension d'une bobine est $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$, ainsi le courant circulant à travers une bobine est continu. Initialement le circuit n'est pas branché à l'alimentation grâce à l'interrupteur et donc $i_L(0) = 0$. La bobine s'oppose donc à la variation de l'intensité. Il faut donc un certain temps pour que la circulation du courant imposée par le générateur s'établisse.

La loi des mailles et la relation courant/tension d'une résistance conduisent à $u_L(t) = e(t) - Ri(t)$. LA tension est nulle avant la fermeture de l'interrupteur et devient brutalement non nulle à la fermeture de ce dernier $u_L(t = 0^+) = E$. Cette tension est positive ainsi la dérivée de l'intensité est positive $u_L(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, ainsi l'intensité circulant dans la bobine augmente continument jusqu'à atteindre la valeur $i = E/R$.

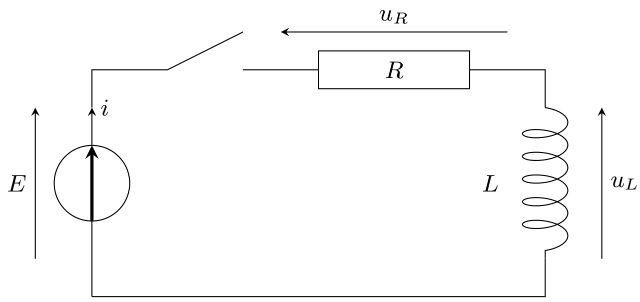


FIGURE 3 – Circuit RL

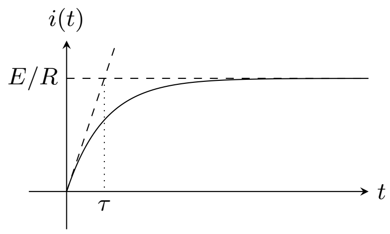


FIGURE 4 – Établissement du courant dans une bobine

? Temps caractéristique

Déterminer le temps caractéristique associé au circuit RC par une analyse dimensionnelle.
Les grandeurs caractéristiques de ce système sont $[R]$ =V/A, $[L]$ =Vs/A, $[E]$ =V ; ainsi $\tau \propto R^\alpha L^\beta E^\gamma$ en $\mathrm{V}^{\alpha+\beta+\gamma}\mathrm{A}^{-\alpha-\beta}\mathrm{s}^\beta$.

$$\begin{aligned} \beta &= 1\ ; \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0\ ; \\ \alpha + \beta &= 0\ . \end{aligned}$$

Il existe une unique solution, le temps caractéristique de ce circuit s'exprimer donc par $\tau \propto L/R$.

✍ Régime transitoire du circuit LC

- L'intensité circulant dans un circuit LC est toujours continue.
- L'intensité initialement nulle croit continument jusqu'à une valeur limite fixée par le générateur E/R.
- Le temps nécessaire à l'évolution de l'intensité est de l'ordre du temps caractéristique du circuit $\tau = R/L$.

✍ Régime permanent du circuit LC

Après un temps suffisamment long ($t \gg \tau$) l'intensité circulant dans la bobine est une constante de valeur E/R tandis que la tension aux bornes de la bobine est nulle : c'est le régime permanent.

II Étude quantitative du circuit RC

2.1 Mise en équation

- Commençons par appliquer la loi des mailles $E = u_C + u_R$.
- Puis introduisons la relation courant/tension de la résistance et du condensateur $E = u_C + Ri = u_C + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

✍ Circuit RC

Le circuit RC vérifie l'équation différentielle suivante

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC} \ ;$$

avec la constante de temps du circuit $\tau = RC$.

2.2 Solution

La solution d'une équation différentielle se compose de deux termes : la solution générale de l'équation homogène (i.e. sans second membre) et une solution particulière de l'équation avec second membre.

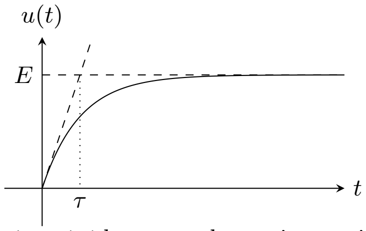
- La solution générale de $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = 0$ est $u_{C,h}(t) = A\exp(-t/\tau)$.
- Une solution particulière de $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ est $u_{C,p} = E$.
- Ainsi la solution cherchée est de la forme $u_C(t) = E + A\exp(-t/\tau)$.

Ensuite il faut exploiter les conditions initiales pour estimer les constantes encore inconnues. Avant la fermeture de l'interrupteur, la tension aux bornes du condensateur est nulle. De plus cette tension est continue par définition, ainsi juste après fermeture de l'interrupteur ($t = 0$) cette tension est toujours nulle ainsi $u_C(0) = 0 = E + A$. Finalement on obtient $A = -E$.

✍ Solution de l'équation différentielle du circuit RC

L'équation différentielle régissant la dynamique d'un circuit RC est vérifiée par la fonction suivante

$$u_C(t) = E\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \ .$$



Remarque : On retrouve une fonction ayant l'allure de la courbe expérimentale observée précédemment, la tension est initialement nulle et augmente progressivement jusqu'à atteindre une valeur limite.

? Temps de réponse

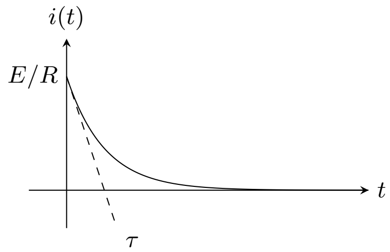
Calculer la valeur de la tension $u_C(t = \tau)$. Pour quelle valeur de t atteint–on la valeur $u_C(T) = 0,95 \times E$.

Ayant maintenant une expression analytique pour la tension aux bornes du condensateur, on peut en déduire une expression de l'intensité du courant traversant le condensateur grâce à $i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

✍ Intensité circulant à travers le circuit RC

En utilisant la relation courant/tension du condensateur, on obtient

$$i_C(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \ .$$



Remarque : Après fermeture de l'interrupteur l'intensité devient brutalement non nulle. Puis elle décroit continument jusqu'à atteindre la valeur nulle.

✍ Régime permanent et transitoire

- Le second membre de l'équation différentielle est appelé terme de forçage. Lorsque ce terme change, le système évolue sous une contrainte "extérieure" vers un nouveau régime permanent en une durée de l'ordre du temps caractéristique du système.
- La solution particulière de l'équation avec second membre traduit le régime permanent. Ce régime est atteint après un temps grand devant le temps caractéristique du système.

2.3 Bilan énergétique

L'énergie dissipée par une résistance est $E_R = Ri^2$, on peut faire apparaître ce terme en multipliant la loi des mailles par i

$$E = u_R + u_C = Ri + u_C \Longrightarrow Ei = Ri^2 + u_C i = Ri^2 + Cu_C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \ ;$$

✍ Bilan de puissance du circuit RC

$$Ei = Ri^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right) \ .$$

Le premier terme est la puissance cédée par le générateur, le second la puissance dissipée par la résistance et le dernier la dérivée de l'énergie emmagasinée par le condensateur.

On peut intégrer le bilan précédent pour obtenir un bilan d'énergie

$$\begin{aligned}
\int_0^{t\to+\infty} E i \mathrm{d}t &= CE\int_0^{t\to+\infty}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = CE\int_{u_C(0)}^{u_C(t\to+\infty)}\mathrm{d}u_C = CE^2 \ ;\\
\int_0^{t\to+\infty} Ri^2 \mathrm{d}t &= \int_0^{t\to+\infty} R\frac{E^2}{R^2}\exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)\mathrm{d}t = \frac{E^2\tau}{2R} = \frac{1}{2}CE^2 \ ;\\
\int_0^{t\to+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}CE^2 \ .
\end{aligned}$$

✍ Bilan d'énergie

Pour un temps suffisamment long, la moitié de l'énergie fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance et l'autre moitié est emmagasinée dans le condensateur.

Remarque : De l'énergie est progressivement stockée dans le condensateur, on parle de charge du condensateur. Il pourra restituer cette énergie sous certaines conditions (voir exercice).

2.4 Décharge du circuit RC

? Circuit RC en régime libre

Mener l'étude du circuit RC lors de la décharge du condensateur. On prendra comme conditions initiales $u_C(0) = E$.

III Étude quantitative du circuit RL

3.1 Mise en équation

- Commençons par appliquer la loi des mailles $E = u_L + u_R$.
- Puis introduisons la relation courant/tension de la résistance et de la bobine $E = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri$.

✍ Circuit RL

Le circuit RL vérifie l'équation différentielle suivante

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \ ;$$

avec la constante de temps du circuit $\tau = L/R$.

3.2 Solution

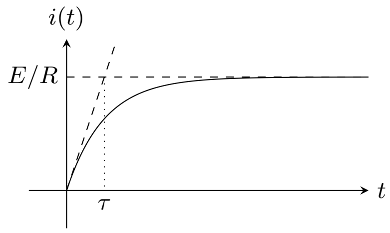
La solution d'une équation différentielle se compose de deux termes : la solution générale de l'équation homogène (i.e. sans second membre) et une solution particulière de l'équation avec second membre.

- La solution générale de $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = 0$ est $i_h(t) = A\exp(-t/\tau)$.
- Une solution particulière de $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{R\tau}$ est $i_p = E/R$.
- Ainsi la solution cherchée est de la forme $i(t) = E/R + A\exp(-t/\tau)$.

Ensuite il faut exploiter les conditions initiales pour estimer les constantes encore inconnues. Avant la fermeture de l'interrupteur, l'intensité circulant à travers la bobine est nulle. De plus cette intensité est continue par définition, ainsi juste après fermeture de l'interrupteur ($t = 0$) cette intensité est toujours nulle ainsi $i(0) = 0 = E/R + A$. Finalement on obtient $A = -E/R$.

✍ Solution de l'équation différentielle du circuit RL
L'équation différentielle régissant la dynamique d'un circuit RL est vérifiée par la fonction suivante

$$i(t) = \frac{E}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \ .$$

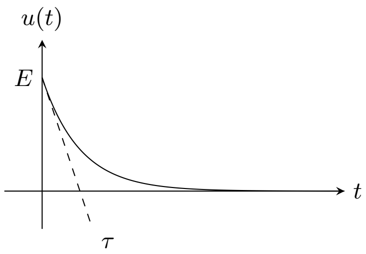


? Temps de réponse
Calculer la valeur de la tension $i(t=\tau)$. Pour quelle valeur de t atteint–on la valeur $i(T) = 0,95 \times E/R$.

Ayant maintenant une expression analytique pour l'intensité traversant la bobine, on peut en déduire une expression de la tension aux bornes de la bobine grâce à $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

✍ Tension aux bornes du circuit RL
En utilisant la relation courant/tension de la bobine, on obtient

$$u_L(t) = E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \ .$$



Remarque : Après fermeture de l'interrupteur la tension devient brutalement non nulle. Puis elle décroit continument jusqu'à atteindre la valeur nulle.

3.3 Bilan énergétique

L'énergie dissipée par une résistance est $E_R = Ri^2$, on peut faire apparaître ce terme en multipliant la loi des mailles par i

$$E = u_R + u_L = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow Ei = Ri^2 + Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \ ;$$

✍ Bilan de puissance du circuit RL

$$Ei = Ri^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) \ .$$

Le premier terme est la puissance cédée par le générateur, le second la puissance dissipée par la résistance et le dernier la dérivée de l'énergie emmagasinée par la bobine.

On peut intégrer l'expression précédente sans quelques étapes de calculs... Utilisons la relation courant/tension de la résistance pour réexprimer les deux premier termes $Ri^2 = Ru_R^2/R^2 = (E-u_L)^2/R$ et $Ei = Eu_R/R = E(E-u_L)/R$, on réinjecte et on obtient

$$E\frac{u_L}{R} = \frac{u_L^2}{R} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) \ .$$

On peut intégrer le bilan précédent pour obtenir un bilan d'énergie

$$\begin{aligned}
\int_0^{t\to+\infty} E\frac{u_L}{R}\mathrm{d}t &= \frac{E^2}{R}\int_0^{t\to+\infty}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\mathrm{d}t = L\left(\frac{E}{R}\right)^2 \ ; \\
\int_0^{t\to+\infty}\frac{u_L^2}{R}\mathrm{d}t &= \frac{E^2\tau}{2R} = \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2 \ ; \\
\int_0^{t\to+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2 \ .
\end{aligned}$$

✍ Bilan d'énergie
Pour un temps suffisamment long, la moitié de l'énergie fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance et l'autre moitié est emmagasinée dans la bobine.

Remarque : De l'énergie est progressivement stockée dans la bobine, on parle de charge de la bobine. Elle pourra restituer cette énergie sous certaines conditions (voir exercice).

3.4 Décharge du circuit RL

? Circuit RL en régime libre
Mener l'étude du circuit RL lors de la décharge du condensateur. On prendra comme conditions initiales $i_L(0) = I_0$.