Chapitre 9

Oscillateurs amortis

–It's a real Kodak moment.

–Sensor readings are starting to oscillate.

Farscape (saison 3, episode 21, 2002)

Bibliographie

✍Cap Prépa Physique MPSI–PCSI–PTSI, Pérez, 2013 $\longrightarrow$ Chapitre 7

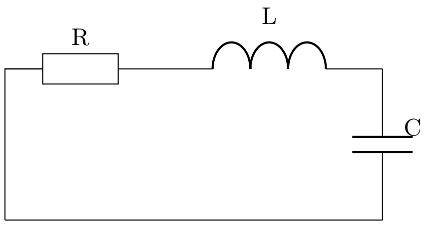
L'étude des systèmes linéaires d'ordre 1 bien qu'intéressante ne représente qu'une infime partie des problèmes que l'on peut étudier en sciences physiques. Dans ce chapitre nous allons nous atteler à l'étude des oscillateur harmonique amortis qui correspondent aux systèmes linéaires d'ordre 2. Nous en avons déjà vu en tout début d'année : l'oscillateur harmonique. Ici nous allons étudier des systèmes ayant un comportement "proche", les oscillateurs harmoniques amortis, nous allons retrouver la même équation que pour l'oscillateur harmonique avec un terme d'amortissement en plus.

Les systèmes linéaires d'ordres 2 sont nombreux : circuit électriques, amortisseur d'automobile. Ces systèmes ne sont pas uniquement utilisé en réponse à un échelon mais également en régime dit forcé, c'est ce qui nous intéressera en fin de ce chapitre.

I Étude qualitative d'un oscillateur

1.1 Exemples d'oscillateurs

1.1.1 Circuit RLC série



Application de la loi de mailles puis de la relation courant/tension de la résistance et du condensateur

$$\begin{aligned} u_L + u_R + u_C =& L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = 0 \\ &\iff LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0 \\ &\iff \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{LC} = 0\,. \end{aligned}$$

✍ Équation différentielle du circuit RLC série

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = 0\,;$$

avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre du circuit (cf. Chapitre 1) et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ le facteur de qualité.

Remarque : Si $Q \longrightarrow +\infty$ on retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique. Le paramètre contrôlant l'amortissement est la résistance, plus R est élevé plus l'amortissement est fort.

Le bilan de puissance s'obtient en multipliant l'équation différentielle du circuit RLC par l'intensité i.

✍ Bilan de puissance

Le bilan de puissance s'écrit
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + Ri^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right) = 0\,;$$

le premier terme correspond à la dérivée de l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine, le second à la puissance dissipée par la résistance et le troisième à la dérivée de l'énergie électrique emmagasinée par le condensateur.

En régime libre l'énergie ne peut augmentée, elle est soit constante soit diminue en se dissipant par la résistance. Ri^2 est la puissance dissipée par la résistance ainsi cela correspond à la dérivée de l'énergie dissipée et donc la dérivée de l'énergie totale $-\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = -Ri^2$. Ceci permet de réécrire le bilan précédent tel que

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)\;; \tag{1}$$

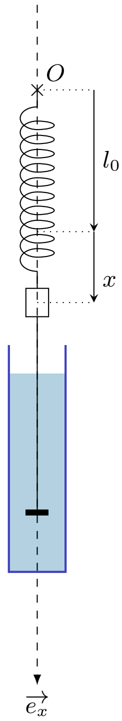
la variation temporelle d'énergie s'écrit comme la somme des puissances reçues et cédées par le système.

✍ Énergie du circuit RLC série

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2\,.$$

Remarque : Contrairement à ce que l'on pourrait croire, il n'est pas toujours possible d'associer une énergie à une puissance.

1.1.2 Oscillateur harmonique amorti mécanique



Appliquons le PFD au système masse/ressort amorti par un frottement de type $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ et dont on néglige le poids

$$m\vec{a} = \vec{F} \iff m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$
$$\iff \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0\,.$$

✍ Équation différentielle vérifiée par un oscillateur mécanique amorti

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,;$$

avec la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et le facteur de qualité $Q = \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{km}$.

✍ Bilan de puissance

On peut écrire un bilan de puissance en multipliant le PFD par $\dot{x}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + \alpha\dot{x}^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = 0\,;$$

le premier terme étant la dérivée de l'énergie cinétique de la masse, le second terme la puissance cédée par le terme de frottement et le troisième terme la dérivée de l'énergie potentielle stockée dans le ressort.

Remarque : De même que pour le circuit RLC on peut écrire $\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$.

? Mise en équation d'un autre problème

Déterminer l'équation différentielle sur θ régissant la dynamique d'un pendule simple.

1.2 Définitions de l'oscillateur harmonique amorti

✍ Oscillateur harmonique amorti

On appelle oscillateur harmonique en régime libre tout système dont une grandeur physique x vérifie l'équation

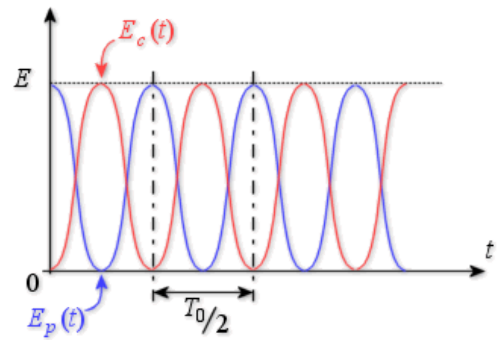
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0\,.$$

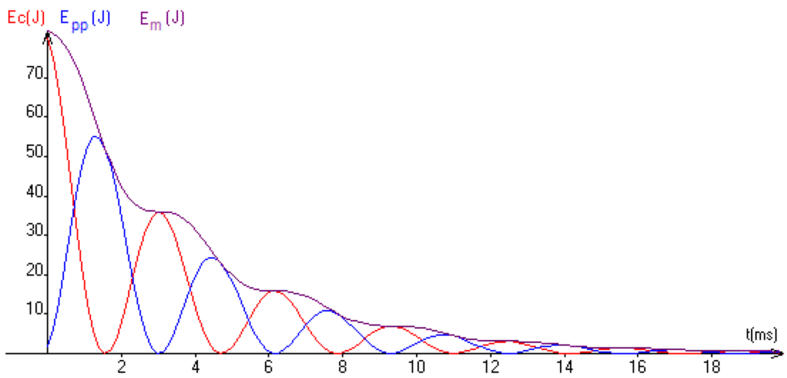
avec ω_0 la pulsation propre du système et Q le facteur de qualité.

Analyse qualitative : exemple de l'oscillateur mécanique

Dans le cas de l'oscillateur mécanique, initialement il a une énergie potentielle non nulle et une énergie cinétique nulle. Durant l'évolution de l'oscillateur, l'énergie potentielle va être convertie en énergie cinétique puis à nouveau en énergie potentielle. A ceci s'ajoute l'effet des frottements qui vont dissiper petit à petit l'énergie de l'oscillateur. Plus l'amortissement est élevé (et donc le facteur de qualité faible) plus l'énergie sera dissipée rapidement jusqu'à arrêt total de l'oscillateur.

Remarque : Les conditions énergétiques c'est pratique :-)





1.3 Différents régimes libres

Initialement les grandeurs sont $(x, \dot{x})=(x_0, 0)$, la courbe débute donc en x_0 avec une pente nulle.

1.3.1 Amortissement faible

On constate expérimentalement que pour $Q > 1/2$ (i.e. $\xi < 1$) le régime est dit pseudo–périodique. On observe quelques oscillations dont l'amplitude décroit avant que l'oscillateur ne s'arrête. La décroissance est d'autant plus élevée que l'amortissement est fort (i.e. le facteur de qualité faible). A l'inverse si l'amortissement tend vers 0, on s'approche du comportement d'un oscillateur harmonique et la période des oscillations tend vers $2\pi/\omega_0$.

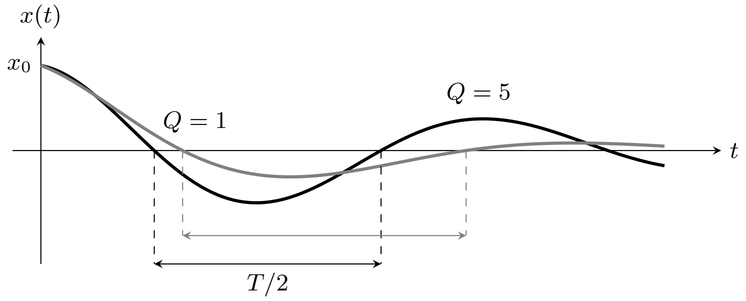


FIGURE 1 – Oscillations libres pseudo–périodique

1.3.2 Amortissement fort

On constante toujours expérimentalement que pour $Q < 1/2$ (i.e. $\xi > 1$) le régime est apériodique, absence d'oscillations. De plus l'évolution est d'autant plus lente que l'amortissement est grand.

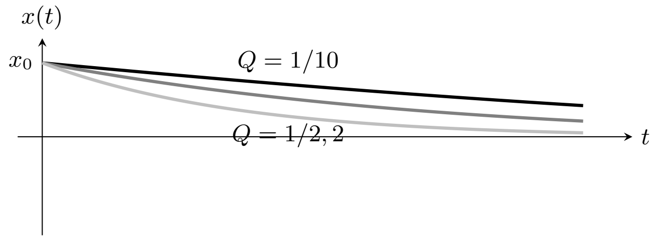


FIGURE 2 – Régime libre apériodique

1.4 Portrait de phase

✍ Portrait de phase
On appelle portrait de phase d'un système à un seul degré de liberté (ici $x(t)$) le tracé de la courbe paramétrique $(\dot{x}, x)$ pour des conditions initiales données.

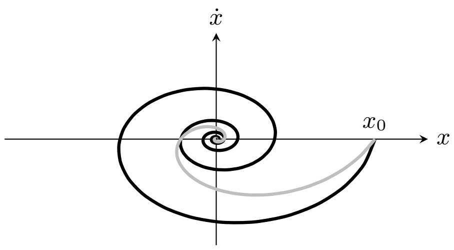


FIGURE 3 – Portrait de phase de régimes pseudo–pédiodiques

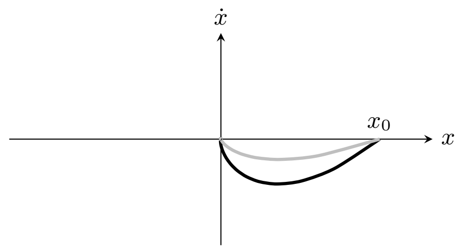


FIGURE 4 – Portrait de phase de régimes apédiodiques

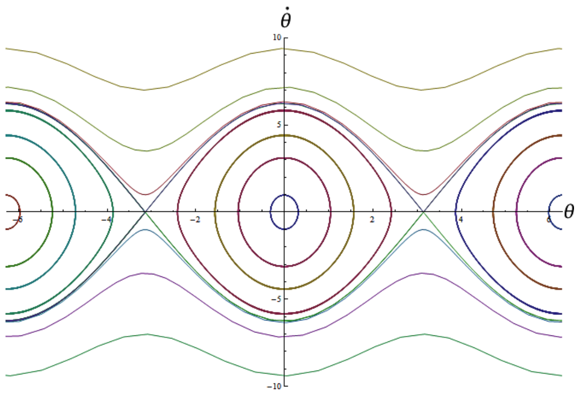


FIGURE 5 – Portrait de phase du pendule simple.

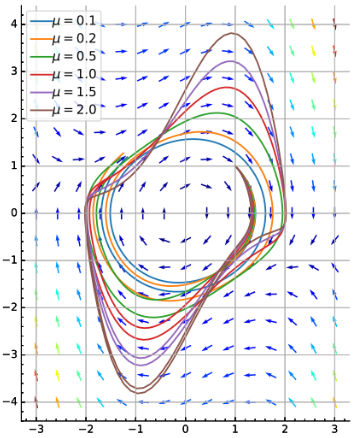


FIGURE 6 – Portrait de phase d'un oscillateur de Van der Pol.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - \mu(1-x^2)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0$$

? **TD10 – Ex2**

II Étude analytique d'un oscillateur

Nous avons vu précédemment que pour résoudre une équation différentielle, la connaissance des conditions initiales était nécessaire afin d'évaluer les constantes. Dans la suite nous considérerons que l'oscillateur est soumis à un échelon de tension nul pour $t < 0$ et E pour $t \geq 0$. Ainsi les grandeurs électriques vérifient les conditions initiales $u_C(0) = 0$ et $i(0) = 0$.

2.1 Résolution analytique

Nous allons chercher à résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants vérifié par un oscillateur harmonique amorti soumis à un échelon de tension

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E\ .$$

La solution se décompose en deux termes, d'une part une solution particulière de l'équation avec second membre (voir ci–dessous) et d'autre part la solution générale de l'équation homogène (voir fiche méthode ci–dessous).

$$\omega_0^2 S_p = \omega_0^2 E \Longrightarrow S_p = E\ .$$

Fiche méthode : Résolution d'EDL2 à coefficients constants sans second membre

On commence par transformer l'EDL2 sans second membre en son équation caractéristique $\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} \to r^2$, $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \to r$ et $u_C \to 1$

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0\ .$$

On résout ensuite le polynôme de degré 2 ainsi obtenu, de discriminant $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2$.
La solution de l'EDL2 prend la forme suivante

– si $\Delta > 0$ alors $Q < 1/2$: régime apériodique, le polynôme possède deux racines $r_\pm \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u_C^h(t) = A\exp(r_+ t) + B\exp(r_- t) &= \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[A\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) + B\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right)\right] \\ &= \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[A'\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) + B'\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right)\right]\ . \end{aligned}$$

Remarque : Il est possible de réécrire une telle solution comme une somme de cosh et sinh.

– si $\Delta < 0$ alors $Q > 1/2$: régime pseudo–périodique, le polynôme possède deux racines $r_\pm \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} u_C^h(t) = A\exp(r_+ t) + B\exp(r_- t) &= \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[A\exp\left(j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + B\exp\left(-j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)\right] \\ &= \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[A'\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + B'\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)\right]\ . \end{aligned}$$

Remarque : Il est possible de réécrire une telle solution comme une somme de cos et sin.

– si $\Delta = 0$ alors $Q = 1/2$: régime critique, le polynôme possède une racine double $r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q}$.

$$u_C^h(t) = (A + Bt)\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\ .$$

✍ Solution générale

La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution générale de l'équation différentielle sans second membre et d'une solution particulière $u_C(t) = u_C^h(t) + u_C^p$.

✍ Stabilité des solutions

Après avoir résolu une EDL2 et déterminé les constantes grâce aux conditions initiales il faut étudier la stabilité des solutions. La physique visant à décrire un système réel, il est bien rare de voir des quantités diverger à l'infini (p.ex énergie infinie). On prendra toujours le temps de vérifier si les solutions obtenues convergent.

2.2 Réponses du système

2.2.1 Régime pseudo–périodique (amortissement faible)

✍ Régime pseudo–périodique

Régime d'évolution d'un oscillateur harmonique faiblement amorti $Q > 1/2$. La solution dans un tel régime est

$$u_C(t) = A\exp(r_+t) + B\exp(r_-t) + E = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[A'\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + B'\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)\right] + E\ .$$

Pour estimer les constantes on utilise les conditions initiales

- $u_C(0) = 0$ par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ;
- $i(0) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ par continuité de l'intensité traversant une bobine.

$$A' + E = 0 \Rightarrow A = -E\ ;$$
$$-\frac{\omega_0}{2Q}A' + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}B' = 0 \Rightarrow B' = \frac{\omega_0}{Q\sqrt{-\Delta}}A' = -\frac{\omega_0}{Q\sqrt{-\Delta}}E\ .$$

✍ Solution en régime pseudo–périodique

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[-E\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) - \frac{E\omega_0}{Q\sqrt{-\Delta}}\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)\right] + E = -E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left[\cos(\Omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin(\Omega t)\right] + E\ .$$

✍ Pseudo–période

La partie oscillante de $u_C(t)$ est de période

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{4\pi}{\sqrt{-\Delta}} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}\ .$$

Néanmoins, puisque les oscillations sont amorties exponentiellement la courbe n'est pas périodique.

Le temps T s'appelle la pseudo–période et $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$ la pseudo–pulsation.

✍ Temps caractéristique d'amortissement

Le temps caractéristique d'amortissement apparaît dans l'exponentielle décroissante réelle

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0}\ .$$

Remarque : Si l'amortissement tend vers la valeur nulle, on retrouve la pulsation propre de l'oscillateur harmonique.

Remarque importante : La solution est composée d'une exponentielle décroissante et de fonctions sinusoïdale, il y a toujours convergence, **solutions stables**.

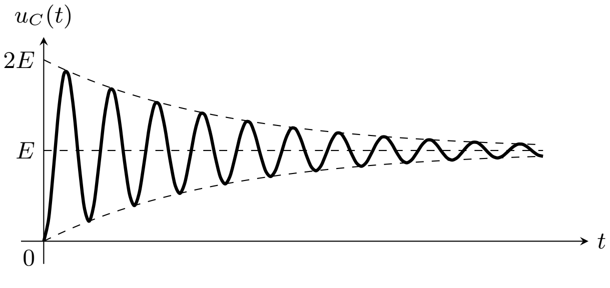


FIGURE 7 – Oscillations pseudo–périodique en tension

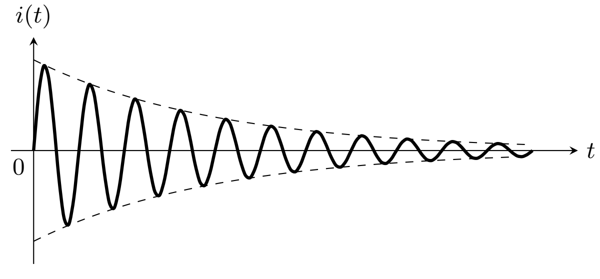


FIGURE 8 – Oscillations pseudo–périodique en intensité

✍ Détermination expérimentale du facteur de qualité en régime pseudo–périodique

L'étude de l'équation différentielle nous a conduit à définir le temps caractéristique d'amortissement $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$ et la pseudo–pulsation $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q}}$ aisément déterminables pas lecture graphique. On peut en déduire le facteur de qualité ainsi

$$\tau\Omega = 2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{4Q^2-1} \Longleftrightarrow Q = \frac{\sqrt{1+\tau^2\Omega^2}}{2}\ .$$

Si le produit $\tau\Omega \gg 1$ alors on peut approché le facteur de qualité par $Q \simeq \dfrac{\tau\Omega}{2}$

Remarque : Ou plus directement, pour un grand facteur de qualité $\Omega \simeq \omega_0$ alors $Q = \dfrac{\tau\Omega}{2}$.

2.2.2 Régime apériodique (amortissement fort)

✍ Régime apériodique

Régime d'évolution d'un oscillateur harmonique fortement amorti $Q < 1/2$. La solution dans un tel régime est

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[A'\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) + B'\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right)\right]$$

Pour estimer les constantes on utilise les conditions initiales

- $u_C(0) = 0$ par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur
- $i(0) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ par continuité de l'intensité traversant une bobine

$$A' + E = 0 \Rightarrow A = -E\,;$$
$$-\frac{\omega_0}{2Q}A' + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}B = 0 \Rightarrow B = -\frac{\omega_0}{Q\sqrt{\Delta}}E$$

✍ Solution en régime apériodique

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[-E\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) - \frac{E\omega_0}{Q\sqrt{\Delta}}\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right)\right] + E \\ &= -E\exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)\left[\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{1-4Q^2}}\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right)\right] + E \end{aligned}$$

✍ Temps caractéristiques

Les exponentielles composant la solution étant réelles, on définit plus aisément des temps caractéristiques par

$$\tau_+ = -\frac{1}{r_+} = \frac{1}{\omega_0}\frac{2Q}{1-\sqrt{1-4Q^2}}\ ;\ \tau_- = -\frac{1}{r_-} = \frac{1}{\omega_0}\frac{2Q}{1+\sqrt{1-4Q^2}}\ .$$

Remarque : Pour un amortissement fort $Q \ll 1$, τ_- devient très faible et τ_+ très grand.

Remarque : Si $Q \longrightarrow 1/2$ alors les deux temps d'amortissement sont du même ordre de grandeur $\tau_- \sim \tau_+ \sim \dfrac{2Q}{\omega_0} \simeq \dfrac{1}{\omega_0}$.

Remarque importante : La solution est composée de deux exponentielles réelles, il faut être attentif au signe de $r_\pm$. Si l'une des racine est positive alors l'exponentielle divergera... ce qui n'a pas de sens physique, on éliminera cette solution.

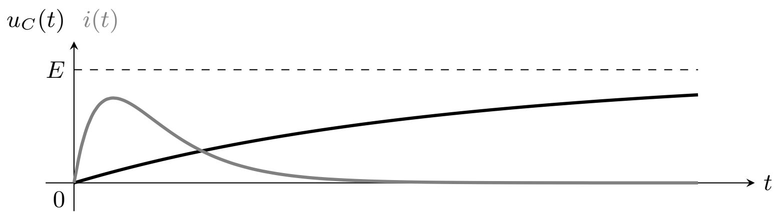


FIGURE 9 – Régime apériodique

2.2.3 Régime critique

Le régime critique correspond au cas intermédiaire entre le cas apériodique et le cas pseudo–périodique. Il est très difficile de l'obtenir expérimentalement car il nécessite de contrôler parfaitement les paramètres. Ce régime possède toutefois un grand avantage, il permet le retour le plus rapide vers une position d'équilibre.

✍ Régime critique

Régime d'évolution d'un oscillateur harmonique amorti tel $Q = 1/2$. La solution d'un tel régime est

$$u_C(t) = (A + Bt)\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) + E\ .$$

Pour estimer les constantes on utilise les conditions initiales

- $u_C(0) = 0$ par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur
- $i(0) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ par continuité de l'intensité traversant une bobine

$$A + E = 0 \Longrightarrow A = -E\ ;$$
$$B - A\frac{\omega_0}{2Q} = 0 \Longrightarrow B = -\frac{\omega_0 E}{2Q}\ .$$

✍ Solution en régime critique

$$u_C(t) = -E\left(1 + \frac{\omega_0}{2Q}t\right)\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) + E\ .$$

Remarque importante : La solution comporte une exponentielle décroissante, il y a toujours convergence.

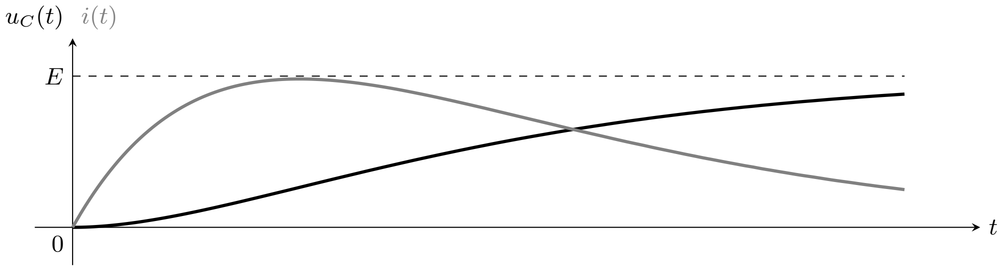


FIGURE 10 – Régime critique

Résumé – Chapitre 08 : Oscillateur amortis

– **Équation différentielle**

$$\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

– **Polynôme caractéristiques**

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

Régime apériodique	Régime critique	Régime pseudo–périodique
$\Delta > 0$ soit $Q < \frac{1}{2}$	$\Delta = 0$ soit $Q = \frac{1}{2}$	$\Delta < 0$ soit $Q > \frac{1}{2}$
$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2}\left(\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}\right)$	$r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q}$	$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2}\left(\frac{1}{Q} \pm j\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}\right)$
$y(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t)$ $\tau_A = -\frac{1}{r_1}$ ou $-\frac{1}{r_2}$	$y(t) = (A + Bt)\exp(r_0 t)$ $\tau_c = \frac{-1}{r_0} = \frac{2Q}{\omega_0}$	$y(t) = \exp(-t/\tau)\left[A\exp\left(j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + B\exp\left(-j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)\right]$ $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$
$y(t) = \exp(-t/\tau)\left[A'\cosh(\Omega t) + B'\sinh(\Omega t)\right]$ $\Omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$		$y(t) = \exp(-t/\tau)\left[A'\cos(\Omega t) + B'\sin(\Omega t)\right]$ $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$