Chapitre 14

Travail, puissance et énergie

It's an energy field created by all living things.
Star Wars V : The Empire Strikes Back (1980)

Bibliographie

✍Cap Prépa Physique MPSI–PCSI–PTSI, Pérez, 2013 ⟶ Chapitre 11

Nous avons vu jusque là une façon d'étudier un problème de mécanique : les lois de Newton et plus particulièrement le PFD. Une approche complémentaire consiste à étudier les quantités conservées lors de l'évolution d'un système. La première formulation de la conservation de l'énergie est due à Huygens. S'en suivirent de nombreux développements théoriques visant à généraliser les principes de conservations : la mécanique lagrangienne puis hamiltonienne et encore plus récemment des travaux mathématiques comme le théorème de Noether.

* *Joseph–Louis Lagrange 1736–1813 : mathématicien et physicien issu du Royaume de Piémont–Sardaigne, techniquement c'est un savoyard*

* *William Rowan Hamilton 1805–1865 : mathématicien, astronome et physicien irlandais*

* *Emmy Noether 1882–1935 : mathématicienne allemande, à l'époque encore très peu de femmes ont des carrières scientifiques (en tout cas reconnues par leur pairs), le théorème de Noether est essentiel est une pierre angulaire de certaines approches modernes de la physique*

Les principes de conservations permirent à Pauli de prédire l'existence de particules encore non détectées lors des désintégrations β qui semblait violer la conservation de la quantité de mouvement dans un premier temps, c'est par la suite que le neutrino fut découvert.

* *Wolfgang Pauli 1900–1958 : physicien autrichien*

I Puissance, travail

1.1 Puissance

✍ Puissance

On appelle puissance exercée par une force $\vec{F}_{i\to M/\mathcal{R}}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ à l'instant t le produit scalaire de cette force par la vitesse du point M

$$\mathcal{P}_{\vec{F}_{i\to M/\mathcal{R}}}(t) = \vec{F}_{i\to M/\mathcal{R}}.\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\ .$$

La puissance s'exprime en Watt (W) ou J.s.
On constate que la puissance dépend de la force considérée et du référentiel choisi (par l'intermédiaire de la vitesse).

Remarque : La puissance $\mathcal{P}$ est la quantité d'énergie reçue par M par unité de temps.

Remarque : La vitesse d'un point matériel dépend du référentiel d'observation, la puissance en dépend donc de la même façon.

Remarque : Si le point matériel est soumis à plusieurs force, la puissance totale est la somme des puissances exercées par chaque force.

- La puissance d'une force est non nulle si et seulement si le point M se déplace et que la force n'est pas orthogonale au mouvement.
- Si la force est « dans le sens » du mouvement (i.e. le produit scalaire est positif) alors la puissance exercée par la force est positive, on parle de **force motrice**. Dans ce cas la force
- A l'inverse si la force est « dans le sens opposé » au mouvement (i.e. le produit scalaire est négatif) alors la puissance exercée par la force est négative, on parle de **force résistante**.

✍ Ordres de grandeur

- Moteur électrique à pile < 1W
- Radiateur kW
- Moteur à combustion 100kW
- Moteur de TGV 10MW

1.2 Travail

✍ Travail élémentaire

On appelle travail élémentaire fourni par la force $\vec{F}_{i\to M/\mathcal{R}}$ au point M au cours de son déplacement, le produit scalaire de la force et du déplacement

$$\delta W_{\vec{F}_{i\to M/\mathcal{R}}} = \vec{F}_{i\to M/\mathcal{R}}.\vec{\mathrm{d}l} = \mathcal{P}_{\vec{F}_{i\to M/\mathcal{R}}}(t)\mathrm{d}t\ .$$

Le travail s'exprimer en Joule (J) ou N.m ou W/s.

Remarque : Le signe du travail élémentaire est le même que celui de la puissance, interprétation force motrice/résistante.

Remarque importante : L'utilisation de la notation δW et non pas $\mathrm{d}W$ n'est pas purement esthétique !!! Le travail élémentaire δW dépend explicitement du déplacement $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ ainsi il dépendra (très très très souvent) du chemin suivi par le point M. Alors qu'une quantité notée $\mathrm{d}W$ n'en dépendra pas, on peut le voir en calculant le travail global exercé par la force $\overrightarrow{F}_{i\rightarrow M/\mathcal{R}}$ sur le point M.

$$\int_{\overrightarrow{r_1}}^{\overrightarrow{r_2}} \mathrm{d}W = W(\overrightarrow{r_2}) - W(\overrightarrow{r_1}) \neq \int_{\overrightarrow{r_1}}^{\overrightarrow{r_2}} \delta W \ ;$$

ATTENTION CECI EST UN CAS TRÈS PARTICULIER JE RÉPÈTE !

Contre–exemple : force de frottement exercée sur un trajet court ou un trajet long, le travail semble intuitivement très différent.

Travail global

Le travail global exercé par la force $\overrightarrow{F}_{i\rightarrow M/\mathcal{R}}$ sur le point M lors de son déplacement s'écrit,

$$W_{\overrightarrow{F}_{i\rightarrow M/\mathcal{R}}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_{\overrightarrow{F}_{i\rightarrow M/\mathcal{R}}}(t)\mathrm{d}t = \int_{\overrightarrow{r_1}}^{\overrightarrow{r_2}} \overrightarrow{F}_{i\rightarrow M/\mathcal{R}}.\overrightarrow{\mathrm{d}l} \ .$$

On constate que le travail dépend de la force considérée, du référentiel choisi et du trajet suivi par le point M.

TD15 – App2 et Ex2

II Énergie cinétique

2.1 Théorème de la puissance cinétique

Que connaissons–nous comme lois en mécanique ? Le principe fondamental de la dynamique, relation qui fait apparaître des forces. Nous venons d'introduire par exemple la notion de puissance (produit entre une force et une vitesse) alors essayons de jouer avec le PFD pour faire apparaître des puissances !

$$m\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \left(\sum_i \overrightarrow{F}_{i\rightarrow M/\mathcal{R}}\right)\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}} \Longleftrightarrow \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}^2_{M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}_{i\rightarrow M/\mathcal{R}} \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{c,M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}_{i\rightarrow M/\mathcal{R}} \ .$$

Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ est définie par,

$$\mathcal{E}_{c,M/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}m\overrightarrow{v}^2_{M/\mathcal{R}} \ .$$

Théorème de la puissance cinétique

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un point matériel mobile M dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ est égale à la somme des puissances de toutes les forces qui s'exercent sur M

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{c,M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{M/\mathcal{R}}(t) \ .$$

Remarque : Ce théorème fourni une relation dite instantanée car valable à tout instant t de l'évolution du système.

Remarque importante : Si aucune force ne travaille alors l'énergie cinétique est constante $\mathcal{P}_{M/\mathcal{R}}(t) = 0 \Longrightarrow \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \text{cste}$. On parle d'intégrale première de l'énergie cinétique.

2.2 Théorème de l'énergie cinétique

On peut obtenir une version intégrale du théorème précédente en réalisant une intégration du théorème de la puissance cinétique entre deux instants t_1 et t_2.

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_{\overrightarrow{F}_{i\rightarrow M/\mathcal{R}}}\mathrm{d}t = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{\overrightarrow{F}_{i\rightarrow M/\mathcal{R}}} \ .$$

Théorème de l'énergie cinétique

Lors du déplacement du point matériel M entre les instants t_1 et t_2, la variation de l'énergie cinétique est égale à la somme de tous les travaux des forces exercées sur ce point matériel

$$\Delta\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(t_2) - \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(t_1) = \sum_i W_{\overrightarrow{F}_{i\rightarrow M,[t_1,t_2]}} \ .$$

Pour un déplacement élémentaire on peut écrire $\mathrm{d}\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \sum_i \mathcal{P}_{\overrightarrow{F}_{i\rightarrow M/\mathcal{R}}}\mathrm{d}t$.

Remarque importante : Il apparaît que la variation de l'énergie cinétique est indépendante du chemin suivi contrairement au travail !

2.3 Bilan

✍ Théorème de la puissance et de l'énergie cinétique

Expression instantanée $$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}_i \ ;$$

Pour un déplacement élémentaire $$\mathrm{d}\mathcal{E}_c = \sum_i \delta W_i \ ;$$

Expression intégrale $$\Delta\mathcal{E}_c = \sum_i W_i \ .$$

Pour un travail reçu positif (i.e. une force motrice) l'énergie cinétique va augmenter, ce travail reçu est stocké sous forme d'énergie cinétique. A l'inverse si le travail est négatif alors de l'énergie cinétique est cédée par le système à l'extérieur.

✍ Interprétation de l'énergie cinétique

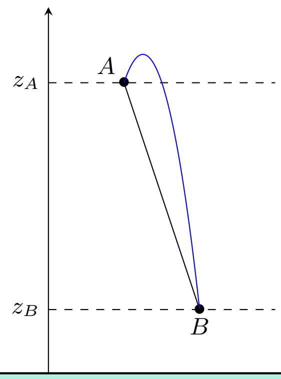
L'énergie cinétique apparaît comme un réservoir de travail que le système peut échanger avec l'extérieur en variant sa vitesse.

? **TD15 – App3**

III Énergie potentielle

3.1 Forces conservatives

Soit un point matériel M de masse m soumis à son propre poids dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Calculons le travail global du mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur terrestre entre deux positions A et B



$$W_{\vec{P},AB} = \int_A^B m\vec{g}\,\vec{\mathrm{d}l} = -mg\vec{u_z}\int_{z_A}^{z_B} \mathrm{d}z\vec{u_z} = -mg(z_B - z_A) = mg(z_A - z_B) \ .$$

Remarque : Attention aux signes lors des produits scalaires, le poids est bien moteur lors de la chute. Le travail du poids est indépendant du chemin suivi, c'est un cas très particulier. Il nous est donc ici possible d'écrire le travail global comme la variation d'une fonction (contrairement au cas général) $W = mgz_A - mgz_B$. Si on se ramène à une transformation élémentaire le travail s'écrit $\delta W = -mg\mathrm{d}z$ et donc dans ce cas très particulier il existe une fonction f telle que $\delta W = -\mathrm{d}f$.

✍ Forces conservatives

Une force $\vec{F}_c$ exercée sur le point matériel M est dite conservative si, lors d'un déplacement quelconque de M par rapport à $\mathcal{R}$, le travail de $\vec{F}_c$ est indépendant du chemin suivi.

Remarque : Ceci implique d'une force conservative peut s'écrire comme dérivant d'un potentiel, l'expression étant $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathcal{E}_p$.

3.2 Théorème de l'énergie potentielle

Le travail étant indépendant du chemin suivi pour une force conservative, on peut décomposer tout déplacement en deux déplacement passant par l'origine O ;

$$W_{\vec{F}_{c,AB}} = W_{\vec{F}_{c,AO}} + W_{\vec{F}_{c,OB}} = W_{\vec{F}_{c,AO}} - W_{\vec{F}_{c,BO}} = f(A,O) - f(B,O) \ .$$

La fonction f ne dépend que de la position, on défini ainsi l'énergie potentielle par cette fonction.

✍ Théorème de l'énergie potentielle

Soit $\vec{F}_c$ une force conservative, alors il existe une fonction scalaire $\mathcal{E}_p(M)$ appelée énergie potentielle qui ne dépend que des coordonnées du point M telle que le travail de la force lors d'un déplacement d'un point A à un point B est égale à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle

$$W_{\vec{F}_{c,AB}} = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B) = -\Delta\mathcal{E}_p \ .$$

Dans le cas d'un déplacement élémentaire on a,

$$\delta W_{\vec{F}_c} = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p \ .$$

Remarque : la grandeur $\mathcal{E}_p$ ne dépend que de la position du point matériel. Ainsi la variation de cette grandeur ne dépend que des positions initiales et finales et pas du chemin suivi ce qui justifie la notation $\mathrm{d}\mathcal{E}_p$.

3.3 Lien avec la puissance

La relation $\delta W = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p$ valable pour toute force conservative lors d'un déplacement élémentaire de durée $\mathrm{d}t$ peut s'écrire également,

$$\frac{\delta W}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}t}\ .$$

✍ Lien entre puissance et énergie potentielle

Pour toute force conservative $\overrightarrow{F}_c$ s'appliquant à un mobile M on peut écrire,

$$\mathcal{P}_{\overrightarrow{F}_{c},M/\mathcal{R}} = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}t}\ .$$

3.4 Bilan

✍ Théorème de l'énergie potentielle

Expression instantanée $$-\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}_{i,c}\ ;$$

Pour un déplacement élémentaire $$-\mathrm{d}\mathcal{E}_p = \sum_i \delta W_{i,c}\ ;$$

Expression intégrale $$-\Delta\mathcal{E}_p = \sum_i W_{i,c}\ .$$

✍ Interprétation de l'énergie potentielle

L'énergie potentiel apparaît comme un réservoir d'énergie potentiellement libérable.

3.5 Exemple de forces conservatives

3.5.1 Champ de pesanteur

Cet exemple a été traité précédemment dans ce chapitre

$$W_{\overrightarrow{P},AB} = -\Delta\mathcal{E}_p = mgz_A - mgz_B$$

✍ Énergie potentielle de pesanteur

$$\mathcal{E}_p(z) = mgz\ .$$

La force peut se retrouver à partir de l'expression de l'énergie potentielle

$$\overrightarrow{P} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathcal{E}_p = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p(z)}{\mathrm{d}z}\overrightarrow{u_z} = m\overrightarrow{g}\ .$$

Fiche méthode : Opérateur vectoriel gradient

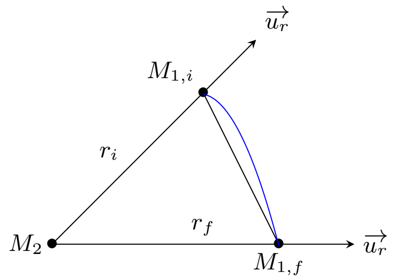
On note $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ l'opérateur de dérivation vectoriel appelé gradient. Cet opérateur peut s'appliquer à un scalaire comme à un vecteur, son expression dépend du repère choisi. En coordonnées cartésiennes il s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

3.5.2 Attraction gravitationnelle

Soit deux points matériels M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2 interagissant par attraction gravitationnelle uniquement. On se place dans un repère cylindrique, l'origine du référentiel est confondue avec M_2, le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ est colinéaire et dans le même sens que $\overrightarrow{M_2M_1}$. La force subie par M_1 de la part de M_2 s'écrit,

$$\overrightarrow{F}_{2\to 1/\mathcal{R}} = -\mathcal{G}\frac{m_1m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r}\ ;$$



Sachant que $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$, calculons le travail de la force d'attraction gravitationnelle sur M_1 lors d'un déplacement de la position $M_{1,i}$ à $M_{1,f}$

$$-\mathrm{d}\mathcal{E}_p = \delta W_{\overrightarrow{F}_{2\to 1}} = \overrightarrow{F}_{2\to 1}.\overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\mathcal{G}\frac{m_1m_2}{r^2}\mathrm{d}r \Longrightarrow \Delta\mathcal{E}_p = \int_{r_i}^{r_f}\mathrm{d}\mathcal{E}_p = \mathcal{G}m_1m_2\int_{r_i}^{r_f}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -\mathcal{G}m_1m_2\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)\ .$$

✍ Énergie potentielle d'attraction gravitationnelle

$$\mathcal{E}_p(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \ .$$

La force d'attraction gravitationnelle se retrouve par,

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{u_r} = -\mathcal{G}\frac{m_1m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r} \ .$$

Si $r_f > r_i$ (i.e. l'altitude du corps augmente) le travail global est négatif (i.e. l'énergie potentielle augmente) et donc la force gravitationnelle résiste à l'ascension d'un corps. A l'inverse si l'altitude diminue, le travail est positif : la gravitation est motrice de la chute des corps.

Remarque : La force électrostatique peut être étudiée aisément par analogie.

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\overrightarrow{u_r} \ ;$$

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_p = -\delta W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\mathrm{d}r \Longrightarrow \mathcal{E}_p = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \ .$$

Fiche méthode : Opérateur vectoriel gradient en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

3.5.3 Force de rappel élastique

Soit un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 fixé en O par une extrémité. A l'autre extrémité est fixée un point matériel M qui subit la force de rappelle élastique $\overrightarrow{F} = -k(l-l_0)\overrightarrow{u_l}$ avec $\overrightarrow{u_l}$ le vecteur unitaire portant l'axe du ressort.

? Déterminer l'énergie potentielle associé à une force de rappel élastique

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_p = -\delta W = k(l-l_0)\overrightarrow{u_l}\overrightarrow{\mathrm{d}l} = k(l-l_0)\mathrm{d}l \Longrightarrow \Delta\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k\left((l_f-l_0)^2 - (l_i-l_0)^2\right) \ .$$

✍ Énergie potentielle de rappel élastique

$$\mathcal{E}_p(l-l_0) = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 \ .$$

Si l'origine des coordonnées correspond à la position au repos du ressort, alors l'énergie potentielle s'écrit $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kx^2$.

IV Énergie mécanique

Nous avons vu deux théorèmes énergétiques :

- le théorème de l'énergie cinétique qui relie variation d'énergie cinétique et travail des forces;
- le théorème de l'énergie potentielle qui relie variation d'énergie potentielle et travail des forces conservatives.

L'ensemble des forces s'appliquant à un système est la somme des forces conservatives et non conservatives,

$$\sum_i \overrightarrow{F}_{i\to M} = \sum_i \overrightarrow{F_{c,i}} + \sum_i \overrightarrow{F}_{nc,i} \ ;$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}_{c,i\to M/\mathcal{R}} + \sum_i \mathcal{P}_{nc,i\to M/\mathcal{R}} = -\sum_i \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,i}}{\mathrm{d}t} + \sum_i \mathcal{P}_{nc,i\to M/\mathcal{R}} \ .$$

✍ Énergie mécanique

On défini l'énergie mécanique comme la somme de l'énergie cinétique et potentielle d'un système,

$$\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} + \sum_i \mathcal{E}_{p,i} \ .$$

✍ Théorème de l'énergie mécanique

Expression instantanée $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}_{i,nc}$;

Pour un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\mathcal{E}_m = \sum_i \delta W_{i,nc}$;

Expression intégrale $\Delta\mathcal{E}_m = \sum_i W_{i,nc}$.

✍ Bilan

Un point matériel M en mouvement par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}$ est capable de stocker de l'énergie sous deux formes : cinétique (lié à la vitesse), potentielle (liée à la position). La somme des deux étant son énergie mécanique. L'énergie mécanique ne varie qu'en présence de forces non conservatives exerçant un travail non nul.

Remarque : Comme pour l'énergie potentielle, l'énergie mécanique est définie par rapport à une origine arbitraire sans signification physique.

✍ Systèmes conservatifs

Un système est dit conservatif si toutes les forces qui lui sont appliquées dérivent d'une énergie potentielle ou bien ne travaillent pas. Son énergie mécanique totale est alors une constante du mouvement

$$\mathcal{P}_{nc}(t) = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{E}_m = \text{cste} .$$

Un système conservatif conserve son énergie mécanique.

L'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement car dépend de la position (par l'énergie potentielle) et de la vitesse (par l'énergie cinétique). Dans le cas d'un système conservatif, l'étude énergie nous amènera à travailler avec des équations différentielles d'ordre 1 ce qui est bien plus simple qu'une équation issue du PFD par exemple qui sera d'ordre 2.

? **TD15 – App4**

V Mouvements unidimensionnels : étude énergétique

On appelle **mouvement unidimensionnel** le mouvement d'un point matériel M de masse m et dont la position est entièrement définie par la donnée d'une seul variable $q(t)$. Un tel mouvement est dit **conservatif** si l'énergie potentiel du système est conservée.

5.1 Exemples

- Une masse suspendu à un ressort constitue un système conservatif unidimensionnel d'énergie mécanique

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}k(-z-l_0)^2 + mgz .$$

Dérivée cette relation par rapport au temps conduit à l'équation du mouvement que l'on obtiendrait grâce au PFD

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0 = m\dot{z}\ddot{z} - k\dot{z}(-z-l_0) + mg\dot{z} \Longrightarrow m\ddot{z} = k(-z-l_0) - mg .$$

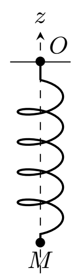


FIGURE 1 – Système masse/ressort vertical

- Une masse suspendu à un fil de longueur l constitue un système conservatif unidimensionnel d'énergie mécanique

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgz = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos(\theta)) .$$

Dérivée cette relation par rapport au temps conduit à l'équation du mouvement que l'on obtiendrait grâce au PFD

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0 = ml\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta \Longrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta .$$

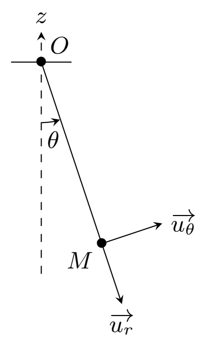


FIGURE 2 – Pendule

✍ Problèmes unidimensionnels conservatifs
Système décrit par une seule variable $q(t)$ et pour lequel l'énergie mécanique est constante au cours du temps,

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}I(q)\dot{q}^2 + \mathcal{E}_p(q)\ .$$

Remarque : $I(q)$ est appelée inertie généralisée du système ; $\mathcal{E}_p(q)$ représente l'énergie potentielle totale du système.

Remarque : L'énergie mécanique est constante, on peut l'évaluer grâce aux conditions initiales.

5.2 Équilibre et stabilité (Démonstrations « calculatoires » hors programme)

L'équation différentielle d'ordre 2 régissant l'évolution d'un système unidimensionnel conservatif s'obtient en dérivant l'expression de son énergie mécanique par rapport au temps et en utilisant la relation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$

$$I(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}I(q)}{\mathrm{d}q}\dot{q}^2 = \phi(q) = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}q}\ .$$

Un système unidimensionnel est à l'équilibre si et seulement si $q = q_0$, $\dot{q} = 0$ et $\ddot{q} = 0$.

✍ Position d'équilibre d'un système conservatif
Un système conservatif possède une position d'équilibre en $q = q_0$ si et seulement son énergie potentielle possède un extrémum en ce point

$$\phi(q_0) = 0 \text{ i.e. } \left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}q}\right|_{q_0} = 0\ .$$

✍ Stabilité d'une position d'équilibre
Une position d'équilibre $q = q_0$ d'un point matériel est dite localement stable si et seulement si lors d'un déplacement élémentaire δ_q depuis cette position, le mobile reste dans le voisinage du point $q = q_0$.

Injectons ce déplacement élémentaire $q = q_0 + \delta_q$ dans l'équation différentielle régissant la dynamique du système et en réalisant un développement au premier ordre en δ_q

$$I(q_0+\delta_q)\frac{\mathrm{d}^2(q_0+\delta_q)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}I(q_0+\delta_q)}{\mathrm{d}q}\left(\frac{\mathrm{d}(q_0+\delta_q)}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \phi(q_0+\delta_q) \Longrightarrow I(q_0)\frac{\mathrm{d}^2\delta_q}{\mathrm{d}t^2} - \phi'(q_0)\delta_q = 0\ .$$

Une telle équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est stable que si tous ses coefficients sont de même signe. L'inertie généralisée est positive par définition, ainsi l'équation précédente est stable si et seulement si $\phi'(q_0) < 0$.

✍ Stabilité d'un équilibre
Un système conservatif possède une position d'équilibre localement stable en $q = q_0$ ei et seulement si son énergie possède un minimum local en ce point

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}q}\right|_{q=q_0} = 0 \text{ et } \left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q=q_0} > 0\ .$$

Remarque : Si la dérivée seconde s'annule, il faudra étudier les dérivées suivantes pour conclure.

? **TD14 – App5**

5.3 Mouvement autour de l'équilibre : étude graphique

Trois cas distincts peuvent se présenter lorsqu'un système présente une situation d'équilibre :

- q_0 est un maximum local de la fonction $\mathcal{E}_p$ alors la position d'équilibre est instable ;
- q_0 est un point d'inflexion de la fonction $\mathcal{E}_p$ alors la position d'équilibre est instable dans un sens et stable dans l'autre ;
- q_0 est un minimum local de la fonction $\mathcal{E}_p$ alors la position d'équilibre est stable.

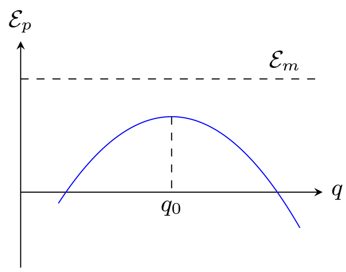


FIGURE 3 – Maximum local, équilibre instable

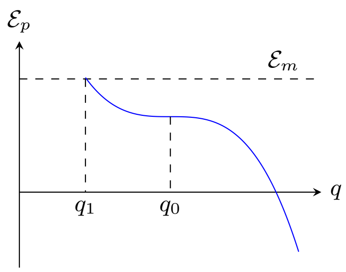


FIGURE 4 – Point d'inflexion, équilibre instable

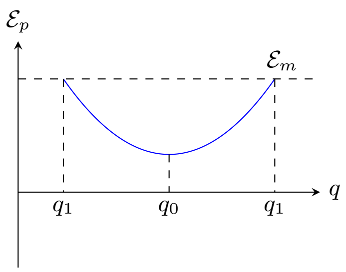


FIGURE 5 – Minimum local, équilibre stable

Un système donné a une énergie mécanique finie répartie entre l'énergie potentielle et cinétique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$. L'énergie potentielle ne peut pas dépasser la valeur fixée de l'énergie mécanique. Il est aisé d'interpréter graphiquement les courbes de potentiel.

- Dans le cas (3), le système dispose d'une certaine énergie mécanique fixée qui en q_1 et q_2 est intégralement stockée sous forme potentielle tandis que en q_0 l'énergie cinétique est maximale. Un système dans cette configuration va osciller autour de la position d'équilibre. De plus l'énergie mécanique étant limité le mouvement du système est borné.
- Dans les deux autres cas le système va évoluer vers un état d'énergie potentielle minimale et diverger ou alors rencontrer un autre état d'équilibre non représenté ici.

Considérons un potentiel quelconque présentant un minimum local. Le système est placé dans trois configurations différentes d'énergies mécaniques différentes. Le système ne possède pas de vitesse initiale, i.e. toute son énergie est sous forme potentielle.

✍ Barrière de potentiel
Un maximum local de la fonction énergie potentielle est appelée une barrière de potentiel.

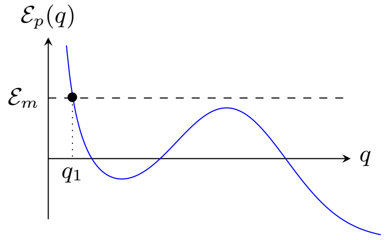


FIGURE 6 – $\mathcal{E}_m > \mathcal{E}_b$

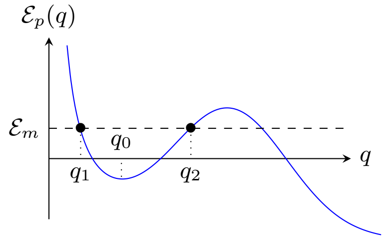


FIGURE 7 – $\mathcal{E}_0 < \mathcal{E}_m < \mathcal{E}_b$

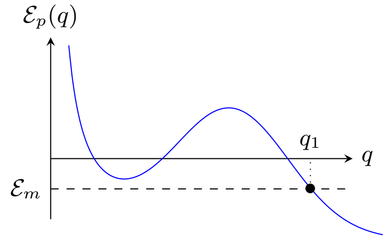


FIGURE 8 – $\mathcal{E}_m < \mathcal{E}_0$

Le système décrit ci–dessus présente :

- une divergence de son énergie potentielle pour $q \longrightarrow 0$;
- un minimum local de potentiel en q_0 de valeur $\mathcal{E}_0$;
- une barrière de potentiel de hauteur $\mathcal{E}_b$ en q_b ;
- une énergie potentielle qui tend vers une valeur finie pour $q \longrightarrow +\infty$.

- Cas (1) : Le système possède une grande énergie mécanique il va évoluer en suivant la courbe. Au niveau du minimum local du potentiel le système présente un maximum local d'énergie cinétique. Le système possède toutefois assez d'énergie mécanique pour franchir la barrière de potentiel : le système continu d'évolué et dépasse le maximum local pour continuer à évoluer vers les q croissants.
  Le mouvement n'est pas borné et se fait sur l'intervalle $[q_1, +\infty[$. Le système peut franchir la barrière de potentiel.
- Cas (2) : Le système possède une énergie mécanique inférieure à la hauteur de la barrière de potentiel. Ainsi le système initialement en q_1 va évoluer en passant par le minimum de potentiel puis évoluer vers les q croissants jusqu'à ce que son énergie potentielle s'annule ce qui est le cas en q_2. En q_2 le système stope son évolution avant de repartir en arrière et d'osciller entre q_1 et q_2.
  Le mouvement est borné sur l'intervalle $[q_1, q_2]$, le système oscille autour de sa position d'équilibre q_0.
- Cas (3) : l'énergie mécanique est plus faible que le minimum local d'énergie potentielle, le système est initialement à droite de la barrière de potentiel et va évoluer vers les q croissants.
  Le mouvement n'est pas borné et se fait sur l'intervalle $[q_1, +\infty[$.

Le portrait de phase peut grossièrement s'estimer à partir de la forme du potentiel.

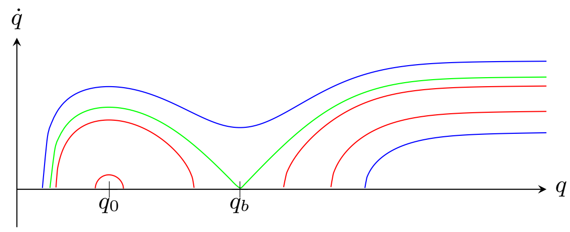


FIGURE 9 – Portrait de phase associé au potentiel précédent

- Pour $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_p$ la vitesse du système $\dot{q}$ est nulle et la position atteint un extremum (minimum ou maximum suivant les cas).
- Pour un minimum local d'énergie potentielle la vitesse du système $\dot{q}$ atteint un maximum local (i.e. car l'énergie cinétique atteint un maximum local).
- Pour un maximum local d'énergie potentielle la vitesse du système $\dot{q}$ atteint un minimum local (i.e. car l'énergie cinétique atteint un minimum local).

5.3.1 Période des oscillations (cas général hors programme)

Dans le cas où le système ne peut sortir du puit de potentiel on observe des oscillations. Essayons d'estimer la période de ces oscillations, pour cela repartons de l'expression de l'énergie mécanique

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}I(q)\dot{q}^2 + \mathcal{E}_p(q) \Longrightarrow \dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(q))}{I(q)}} \ .$$

De cette équation on peut en tirer une expression du temps infinitésimal mit pour réaliser un déplacement infinitésimal puis l'intégrer sur un aller–retour pour obtenir la période des oscillations

$$T = 2\int_{q_1}^{q_2} \sqrt{\frac{I(q)}{2(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(q))}}\mathrm{d}q \ .$$

Remarque : Naturellement le résultat dépend de la forme du potentiel.

Remarque : Inutile de retenir la formule précédente mais il faut comprendre le raisonnement.

5.3.2 Approximation harmonique

L'étude des oscillations est complexe dans le cas général car comme sur l'exemple précédent, le potentiel est clairement non–linéaire. Cependant il est toujours possible d'étudier le comportement du système pour des petites oscillations. Dans un tel cas on peut se contenter d'un développement limité du potentiel en $q = q_0 + \delta_q$... et oui les mathématiques viennent à notre secours ici !

$$\mathcal{E}_p(q) = \mathcal{E}_p(q_0) + \left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}q}\right|_{q_0} \delta_q + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q_0} \delta_q^2 + o(\delta_q^2) \ .$$

Le terme d'ordre 0 est égal à la valeur de l'énergie potentiel au point d'équilibre, le terme d'ordre 1 est nul par définition d'une position d'équilibre et le terme d'ordre 2 est non nul et positif pour une position d'équilibre stable.

✍ Approximation harmonique

Dans le cadre de l'approximation harmonique l'énergie mécanique s'écrit,

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}I(q_0)\delta_q^2 + \frac{1}{2}\kappa\delta_q^2 \ ;$$

avec $\kappa = \left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}q_2}\right|_{q_0}$ et $\mathcal{E}_m = \text{cste}$.

Remarque : Par analogie avec l'oscillateur harmonique on peut en déduire une pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I(q_0)}}$.

Remarque : Dérivée l'expression précédente conduite à l'approximation linéaire de l'équation du mouvement $I(q_0)\ddot{\delta_q} = \kappa\delta_q = 0$. On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

Remarque : La même étude peut être réalisée autour d'une position d'équilibre instable, ce qui conduirait à $I(q_0)\ddot{\delta_q}^2 - \kappa\delta_q = 0$ et à une solution de forme exponentielle divergente.

✍ Développement de Taylor

Soit I un intervalle réel, E un espace vectoriel normé réel et $f : I \to E$ une fonction $\mathcal{C}^n$ en $a \in I$ alors pour tout $x \in I$

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(x) + R_n(x) \ .$$

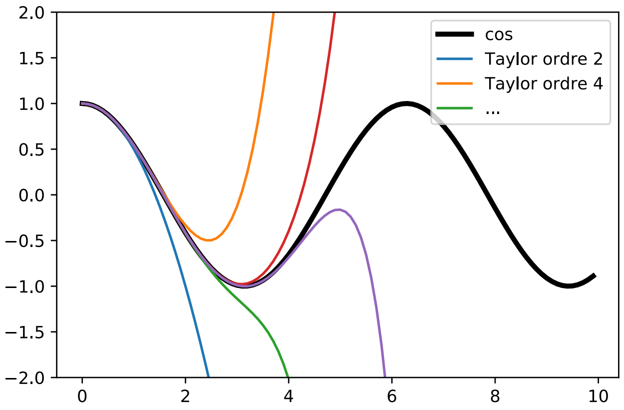


FIGURE 10 – Développement de Taylor de la fonction cosinus

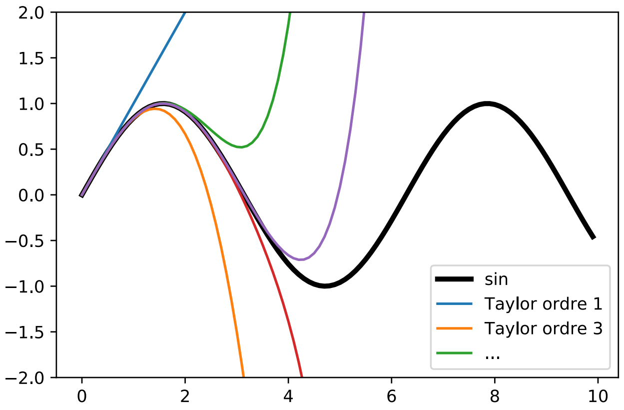


FIGURE 11 – Développement de Taylor de la fonction sinus

Remarque : La prise en compte des non linéarités est possible en poussant le développement de Taylor au delà de l'ordre 1.
Exemple : L'approximation des petits angles faites lors de l'étude du pendule simple revient à tronquer le développement de Taylor à l'ordre 1. La prise en compte des non linéarités conduit à un écart d'autant plus important que l'on s'éloigne du domaine des « petits angles ». Nous déterminerons expérimentalement le domaine des « petits angles ».

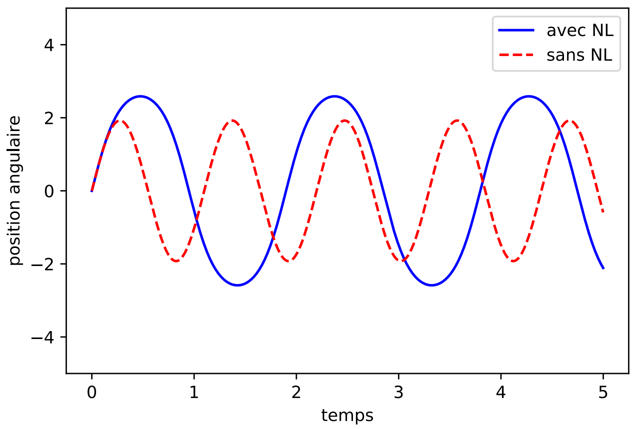


Figure 12 – Position angulaire du pendule sans et avec non linéarités

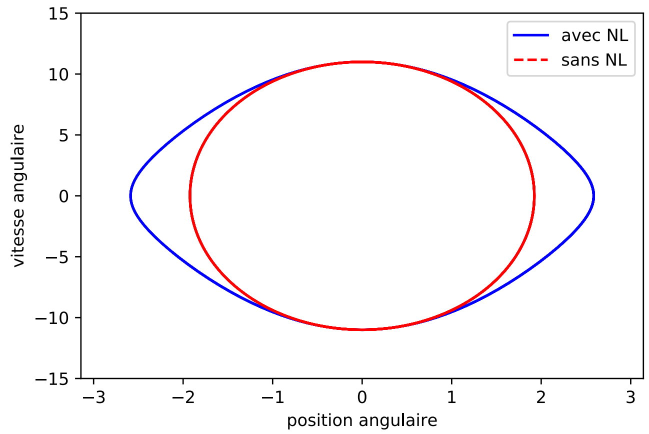


Figure 13 – Portrait de phase du pendule sans et avec non linéarités

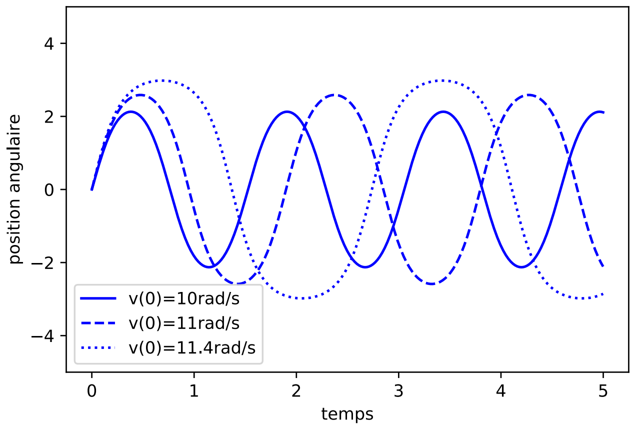


Figure 14 – Oscillation d'un pendule pour différentes vitesses initiales

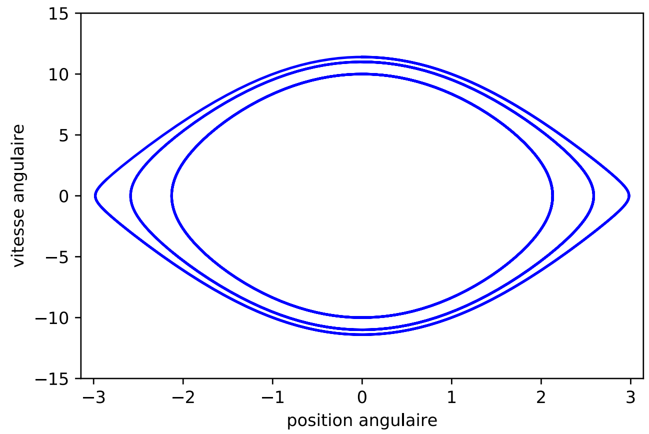


Figure 15 – Portrait de phase d'un pendule pour différentes vitesses initiales

Bilan – Chapitre 13 : Théorèmes énergétiques

✍ Bilan : théorème de la puissance et de l'énergie cinétique

Expression instantanée	$\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}_i$;
Pour un déplacement élémentaire	$\mathrm{d}\mathcal{E}_c = \sum_i \delta W_i$;
Expression intégrale	$\Delta\mathcal{E}_c = \sum_i W_i$.

✍ Bilan : théorème de l'énergie potentielle

Expression instantanée	$-\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}_{i,c}$;
Pour un déplacement élémentaire	$-\mathrm{d}\mathcal{E}_p = \sum_i \delta W_{i,c}$;
Expression intégrale	$-\Delta\mathcal{E}_p = \sum_i W_{i,c}$.

✍ Bilan : théorème de l'énergie mécanique

Expression instantanée	$\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}_{i,nc}$;
Pour un déplacement élémentaire	$\mathrm{d}\mathcal{E}_m = \sum_i \delta W_{i,nc}$;
Expression intégrale	$\Delta\mathcal{E}_m = \sum_i W_{i,nc}$.