Chapitre 15

Particules chargées dans des champs électrique et magnétique

We follow the ever falling grains
Electrons and protons fight again
Electron – Serj Tankian

Bibliographie

✍Cap Prépa Physique MPSI–PCSI–PTSI, Pérez, 2013 ⟶ Chapitre 12

De la même façon qu'une masse est sensible au champ gravitationnel, une charge électrique est sensible au champ électromagnétique. Dans ce chapitre nous allons étudier le comportement d'une particule chargée en mouvement dans un champ électrique uniforme ou un champ magnétique uniforme. De nombreuses applications existent : des anciens téléviseurs aux accélérateurs de particules.

I Force de Lorentz

1.1 Force électrique

Une particule chargé soumis à un champ électrique $\overrightarrow{E}$ subit une force dite électrique qui s'écrit

$$\overrightarrow{F}_{el} = q\overrightarrow{E} \ .$$

Remarque : Une particule chargée va accélérer parallèlement au champ électrique.

> ✍ **Champ électrique**
> Un champ électrique est créé par la présence d'autres charges électriques. C'est une grandeur vectorielle qui s'exprime en V.m^{-1}.

Remarque : La force électrostatique entre deux particules chargées s'écrit $\overrightarrow{F} = -\dfrac{qq'}{4\pi\mathcal{E}_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$ on peut identifier le champ électrique créé par l'une des particule à l'aide de la force de Lorentz électrique

$$\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi\mathcal{E}_0 r^2}\overrightarrow{e_r} \ .$$

1.2 Force magnétique

Une particule chargée soumis à un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ subit une force qui s'écrit,

$$\overrightarrow{F}_{mag} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} \ .$$

> ✍ **Champ magnétique**
> Un champ magnétique peut être créé par des charges électriques en mouvement. C'est une grandeur vectorielle qui s'exprime en Tesla (T).

Remarque : Cette expression a été construite suite à l'observation de plusieurs faits expérimentaux :

- Un faisceau d'électron soumis à un champ magnétique parallèle n'est pas affecté.
- Un faisceau d'électron soumis à un champ magnétique orthogonal décrit une trajectoire circulaire dans le plan formé par le champ et la vitesse initiale.
- Si on double l'intensité du champ, le rayon du cercle est divisé par deux, i.e. la force est proportionnelle à l'intensité du champ.
- Si la vitesse du faisceau est doublée, le rayon du cercle est divisé par deux, i.e. la force est proportionnelle à la norme de la vitesse.

> ☕ **Effet d'un champ magnétique sur un faisceau d'électron (voir TP22)**

1.3 Ordres de grandeurs

Données : Électron $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg et $q = -1.6 \times 10^{-19}$ C

Comparons le poids et la force électrique subis par un électron soumis au champ de pesanteur $g = 9.81$N/kg et un champ électrique de $E = 100$V/m (champ électrique typique à proximité de la Terre) ;

$$\frac{mg}{qE} \sim 6 \times 10^{-13} \ll 1 \ .$$

Pour des particules chargées, le poids est négligeable devant la force électrique.

> ✍ **Champs électriques**
> – Champ électrique créé par une charge élémentaire à 1×10^{-9} m : 1×10^{9} V m^{-1}
> – Champ électrique créé par une charge élémentaire à 1 m : 1×10^{-9} V m^{-1}

De même comparons le poids et la force magnétique subis par un électron soumis à un champ magnétique $B = 1 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$ (champ magnétique typique à la surface de la Terre) et se déplaçant à une vitesse $v = 1.0 \times 10^{5}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

$$\frac{mg}{qvB} \sim 6 \times 10^{-11} \ll 1\ .$$

Ici encore le poids est négligeable devant la force magnétique.

✍ Champs magnétiques

- Activité cérébrale $1 \times 10^{-15}\,\mathrm{T}$
- Vide interstellaire $1 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$
- Champ magnétique terrestre $4.7 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$
- Aimant permanent 0.1 à 1 T
- Électroaimant 10 à 100 T
- Magnétar $1 \times 10^{11}\,\mathrm{T}$

✍ Poids vs “Forces Électromagnétiques"

Dans les conditions expérimentales terrestres, le poids d'une particule chargée est largement négligeable devant les forces électrique et magnétique s'exerçant sur cette particule.

1.4 Force de Lorentz

En toute généralité une particule chargée est soumis à la fois à la force électrique et la force magnétique.

✍ Force électromagnétique de Lorentz

Une particule de charge q et animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un champ électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ subit la force électromagnétique de Lorentz

$$\vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)\ .$$

* *Hendrik Antoon Lorentz 1853–1928 : physicien hollandais, prix Nobel de physique 1902*

Remarque : La direction de la force magnétique se trouve rapidement en utilisant la “règle" de la main droite.

Dans le référentiel d'étude, la particule est soumise à la force de Lorentz dont la puissance s'écrit,

$$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L.\vec{v} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right).\vec{v} = q\vec{E}.\vec{v}\ .$$

✍ Puissance de la force de Lorentz

La composante magnétique de la force de Lorentz ne fournit aucune puissance car elle est orthogonale à la vitesse, la force électrique peut fournir une puissance.

Interprétation :

- Un champ magnétique peut uniquement dévier une particule charger, pas modifier la norme de sa vitesse.
- Un champ électrique peut modifier la norme de la vitesse.

On peut de même calculer le travail élémentaire de la force de Lorentz,

$$\delta W_L = \mathcal{P}_L \mathrm{d}t = q\vec{E}.\vec{\mathrm{d}l}\ .$$

✍ Potentiel électrique

Le potentiel électrique noté $V(M)$ est une grandeur réelle dépendant du point M s'exprimant en V, telle que entre deux points de l'espace séparés d'un déplacement $\vec{\mathrm{d}l}$ la variation élémentaire $\mathrm{d}V$ de V est liée au champ électrique par

$$\mathrm{d}V = -\vec{E}.\vec{\mathrm{d}l}\ .$$

Calculons maintenant le travail global de la force de Lorentz,

$$W_{L,AB} = \int_A^B -q\mathrm{d}V = qV(A) - qV(B)\ .$$

Remarque : Le travail de la force de Lorentz est indépendant du chemin suivi, c'est une force conservative. On peut ainsi définir l'énergie potentielle du système.

✍ Énergie potentielle électrique

Une particule de charge q située en M soumis à un champ électrique $\vec{E}$ possède une énergie potentielle électrique de la forme,

$$\mathcal{E}_{p,el}(M) = qV(M)\ .$$

II Particule chargée dans un champ électrique

2.1 Étude du mouvement

Soit une particule de charge q et de masse m dans un champ électrique $\overrightarrow{E}$ uniforme. Nous allons travailler dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Vu l'absence de symétrie, prenons un repère cartésien $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ tel que :

- la particule est initialement en O ;
- le champ électrique s'écrit $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u_y}$;
- la vitesse intialle de la particule $\overrightarrow{v_0} = v_0 \cos\alpha \overrightarrow{u_x} + v_0 \sin\alpha \overrightarrow{u_y}$.

Bilan des forces : la partie électrique de la force de Lorentz $q\overrightarrow{E}$ et le poids $m\overrightarrow{g}$ qui sera négligé.

Le principe fondamentale de la dynamique s'écrit $m\overrightarrow{a} = q\overrightarrow{E}$. Après projection il prend la forme

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \ ; \\ m\ddot{y} = qE \ ; \\ m\ddot{z} = 0 \ . \end{cases}$$

Ces équations sont indépendantes et ne posent pas de problème. Une première intégration conduit à la vitesse

$$\begin{cases} m\dot{x} = \text{cste} = v_0 \cos\alpha \ ; \\ m\dot{y} = qEt + \text{cste} = qEt + v_0 \sin\alpha \ ; \\ m\dot{z} = \text{cste} = 0 \ . \end{cases}$$

> **✍ Mouvement dans un champ électrique uniforme**
> Le mouvement dans un champ électrique uniforme est plan. La trajectoire est contenue dans le plan généré par la vitesse initiale et le champ électrique.

Remarque : Ce n'est évidemment pas vrai si l'on travaille avec un champ électrique non–uniforme.

Une seconde intégration conduit à la position

$$\begin{cases} mx = v_0 \cos\alpha t + \text{cste} = v_0 \cos\alpha t \ ; \\ my = \dfrac{1}{2}qEt^2 + v_0 \sin\alpha t + \text{cste} = \dfrac{1}{2}qEt^2 + v_0 \sin\alpha t \ ; \\ mz = \text{cste} = 0 \ . \end{cases}$$

Remarque : Avec le temps la trajectoire tend à être parallèle au champ électrique.

En éliminant t dans les composante x et y on obtient l'équation de la trajectoire

$$y = \frac{qE}{2mv_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + (\tan\alpha)x \ .$$

> **✍ Trajectoire dans un champ électrique uniforme**
> La trajectoire est un arc de parabole contenu dans le plan généré par la vitesse initiale et le champ électrique. La concavité est dirigée dans le sens de $\overrightarrow{E}$ si la charge est positive.

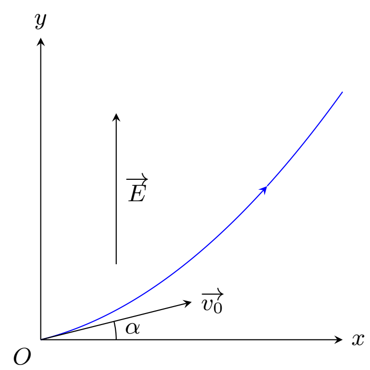

FIGURE 1 – Trajectoire parabolique d'une particule chargée soumise à un champ électrique uniforme

2.2 Applications

2.2.1 Accélérateur de particules 1/2

Si l'on utilise un champ parallèle à la vitesse, seule la norme de la vitesse est modifiée. Si on applique le PFD on obtient

$$m\ddot{y} = qE\ ;$$

i.e. la force électrique accélère (ou freine) la particule le long de l'axe portant le champ électrique.

? Calculer la vitesse puis la position dans cette configuration

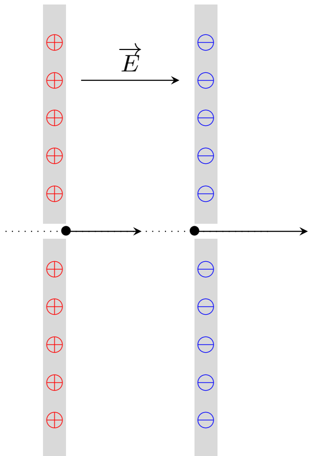

FIGURE 2 – Cas $q > 0$

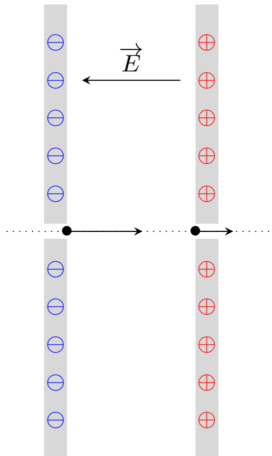

FIGURE 3 – Cas $q > 0$

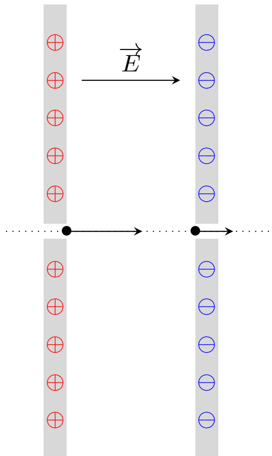

FIGURE 4 – Cas $q < 0$

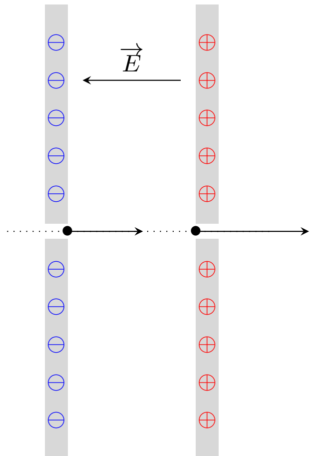

FIGURE 5 – Cas $q < 0$

Par analogie avec la gravitation universelle on peut affirmer que la force électrique est conservative. La particule n'est soumise qu'à des forces conservatives alors son énergie mécanique se conserve

$$\mathcal{E}_c(B) - \mathcal{E}_c(A) = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B) \Longleftrightarrow \frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_A^2\right) = q\left(V_A - V_B\right)\ .$$

Dans le cadre des accélérateurs de particules on appelle $U = V_A - V_B$ la tension accélératrice telle que $\Delta\mathcal{E}_c = qU$.

✍ Électronvolt

Un électronvolt (eV) correspond au gain d'énergie cinétique d'un électron accéléré sous une tension accélératrice $\Delta U = 1.0\,\mathrm{V}$

$$1\mathrm{eV} \sim 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}\ .$$

Remarque : Si on considère une particule initialement au repos, sa vitesse s'écrit $v_B = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$.

Remarque : A haute vitesse $v/c \sim 0,1c$ les lois de la mécaniques classiques cessent d'être valables et on entre dans le domaine de la relativité restreinte.

2.2.2 Déviation de particules chargées

Nous avons vu dans la partie précédente qu'un champ électrique dévie dans sons sens une charge positive. Un faisceau d'électrons en mouvement rectiligne uniforme qui pénètre dans une zone où il existe un champ électrique perpendiculaire sera dévié suivant un arc parabolique de concavité opposée au champ électrique. Les électrons du faisceau une fois ressortis de cette zone de champ électrique seront à nouveau en mouvement rectiligne uniforme, on peut ainsi dévier un faisceau de particules chargées. Ce principe était utilisé dans les anciens téléviseurs ou oscilloscopes.

? TD 16 Ex1

III Particule chargée dans un champ magnétique

3.1 Étude du mouvement

Soit une particule de charge q et de masse m initialement à la vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$ en présence d'un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$. Commençons par étudier la norme de la vitesse, une étude énergétique suffit pour cela

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{dt}} = \mathcal{P}_{mag} = \overrightarrow{F}_{mag}.\overrightarrow{v} = \left(q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{V}\right).\overrightarrow{v} = 0 \; .$$

La force magnétique ne fourni aucune puissance au système, ainsi la norme de la vitesse est inchangée car son énergie cinétique est inchangée $\forall t$, $|\overrightarrow{v}(t)| = |\overrightarrow{v_0}|$.

✍ Effet du champ magnétique
Un champ magnétique ne modifie pas la norme du vecteur vitesse, il ne peut que modifier sa direction.

Pour étudier le changement de direction du vecteur vitesse il faut utiliser une approche prenant en compte le caractère vectoriel des différentes quantités. Appliquons le PFD dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen en utilisant les coordonnées cartésiennes. Deux forces s'appliquent : la force magnétique et le poids que nous négligeons. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$\begin{cases} m\ddot{x} = q(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})_x = q(v_yB_z - v_zB_y) = q\dot{y}B \; ; \\ m\ddot{y} = q(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})_y = q(-v_xB_z + v_zB_x) = -q\dot{x}B \; ; \\ m\ddot{z} = q(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})_z = q(v_xB_y - v_yB_x) = 0 \; . \end{cases}$$

Initialement la vitesse est suivant $\overrightarrow{u_x}$ ainsi il n'y a aucune composante de la vitesse suivant $\overrightarrow{u_z}$, le mouvement est contenu dans le plan $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$. Les équations sur $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ sont couplées, la résolution est possible mais fastidieuse (voir annexe)... Toutefois nous savons déjà plusieurs choses à propos de ce problème.

- Le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est uniforme.
- La partie magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas : la particule a une vitesse de norme constante v_0.
- La partie magnétique de la force de Lorentz est orthogonale à la trajectoire : la trajectoire est incurvée.

Hypothèse : faisons l'hypothèse que le mouvement est circulaire uniforme.
Prenons le cas où $q < 0$, ainsi la particule suit une trajectoire circulaire dans le sens trigonométrique $\dot{\theta} > 0$. On travaille en coordonnées cylindriques telle que la vitesse $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{u_\theta}$, le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$mr\ddot{\theta}\overrightarrow{u_r} - mr\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_\theta} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = qv_0B\overrightarrow{u_r} \; ;$$

On obtient deux équations indépendantes $\ddot{\theta} = 0$ et $r = -\dfrac{qB}{r\omega^2} > 0$.

Toutefois r et ω sont deux inconnues non indépendantes, on peut écrire $v_0 = r\omega$ et ainsi obtenir les expressions du rayon de la trajectoire et de la vitesse angulaire de la particule.

✍ Rayon de la trajectoire
Le rayon r de la trajectoire circulaire vérifie par une particule de chargé négative est

$$r = -\frac{mv_0}{qB} \; .$$

Remarque : Pour une particule de charge positive on trouve $r = \dfrac{mv_0}{qB}$.

Remarque : De plus $\omega = \dfrac{v_0}{r} = \pm\dfrac{qB}{m}$ en fonction du signe de q, $\omega > 0$ si $q < 0$ et inversement.

✍ Bilan
Étude d'une particule dans un champ $\overrightarrow{B}$ uniforme :
- Montrer que $|\overrightarrow{v}|$ est constante.
- Obtenir le rayon r de la trajectoire, mouvement circulaire uniforme.
- Placer le centre du cercle à la distance r de la position initiale de la particule, dans la direction indiquée par $\overrightarrow{F}_{mag} = q\overrightarrow{v_0} \wedge \overrightarrow{B}$. Cette direction se détermine facilement avec la "règle" de la main droite. Attention le sens de $q\overrightarrow{v_0}$ dépend du signe de q.
- L'orientation de la trajectoire doit être conforme au sens de $\overrightarrow{v_0}$.

? TD 16 App3

3.2 Applications

3.2.1 Spectrographe de masse

TD 16 Ex3

Un spectrographe de masse est un appareil destiné à séparer les isotopes d'une même espèce chimique. Prenons par exemple l'hélium 3 (2 protons + 1 neutron) et l'hélium 4 (2 protons + 2 neutrons), ils ont la même charge électrique mais une masse différente. Deux isotopes ont la même réactivité chimique on ne peux les distinguer par des méthodes chimiques, on aura donc recourt à des méthodes physiques.

- On ionise le mélange d'isotopes en le bombardant d'électrons, pour obtenir des particules chargées. Elles sont triées pour qu'on obtienne en sortie des particules avec la même charge.
- Les ions sont accélérés grâce à un champ électrique créé entre deux plaques chargées.
- Le faisceau arrive dans un déviateur, siège d'un champ magnétique orthogonal à la vitesse des particules constituant le faisceau. Chaque ion prend alors une trajectoire de rayon $r = -mv_0/qB$. Ainsi chaque isotope aura une trajectoire qui lui est propre qui permet de les séparer les uns des autres.

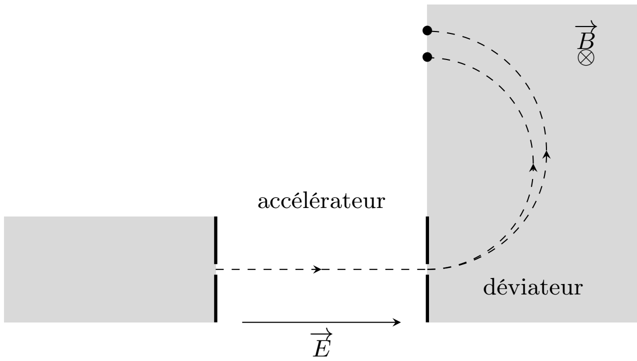

FIGURE 6 – Principe du spectrographe de masse

3.2.2 Accélérateur de particules 2/2

TD 16 Ex2

Pour étudier les particules chargées on réalise des collisions (comme au LHC à la frontière franco–suisse). Les particules sont accélérées par un champ électrique afin d'atteindre des vitesses élevées. Cependant un accélérateur serait vite limité car l'étude de particules nécessite des vitesses de plus en plus grandes. La solution est apportée par plusieurs types d'accélérateurs comme par exemple le cylotron. Ces accélérateurs sont composés de sections accélératrice présentant un fort chap électrique et de déviateur afin de faire faire un demi tour aux particules. A chaque passage dans un déviateur les particules sont de plus en plus rapide et donc le rayon de la trajectoire des particules est de plus en plus grand.

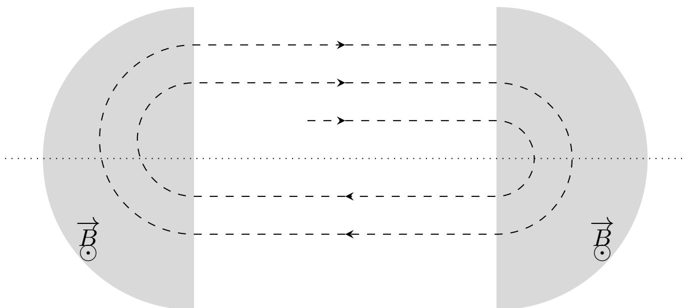

FIGURE 7 – Principe du cyclotron

Cependant il ne peux régner un champ électrique constant dans l'accélérateur, il faut régulièrement inversé le sens du champ électrique pour accélérer les particules à chacun de leurs passages.

IV Limites relativistes

Analyse documentaire : limites relativistes de la mécanique

$$Ec = (\gamma - 1)mc^2 \; ;$$
$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \; .$$

Annexe – Chapitre 14 : Résolutions d'équations différentielles couplées

On cherche ici à résoudre le système

$$\begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}B \; ; \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}B \; ; \end{cases}$$

Il existe plusieurs méthodes (ou astuces) pour résoudre un tel système ici nous allons utiliser les complexes.
On pose une nouvelle variable complexe $z = x + jy$ puis on réaliser la combinaisons linéaire $(1) + j \cdot (2)$ des équations différentielles précédentes

$$m(\ddot{x} + j\ddot{y} = qB\,(\dot{y} - j\dot{x}) = -jqB\,(\dot{x} + j\dot{y}) \Rightarrow m\ddot{z} = -jqB\dot{z} \; .$$

L'équation différentielle ci–dessus admet comme solution

$$\dot{z}(t) = \lambda \exp^{-\frac{t}{\tau}} + \mu \text{ avec } \tau = \frac{m}{-jqB} \; ; \; \mu = 0 \; .$$

Prenons comme conditions initiales $\overrightarrow{OM}(0) = x_0\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{u_y}$ alors pour la condition initiale en vitesse on obtient

$$\dot{z}(0) = \lambda = jv_0 \; .$$

Intégrons une fois $\dot{z}$ pour décrire la position de la particule

$$z(t) = jv_0(-\tau)\exp^{-\frac{t}{\tau}} + \nu = \frac{mv_0}{qB}\exp^{-\frac{t}{\tau}} + \nu \; .$$

Ainsi les conditions initiales en positions s'écrivent

$$z(0) = x_0 = \frac{mv_0}{qB} + \nu \Rightarrow \nu = x_0 - \frac{mv_0}{qB} \; .$$

Ainsi la solution s'écrit

$$z(t) = \frac{mv_0}{qB}\left(\exp^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right) + x_0 \; .$$

L'extraction des parties réelle et imaginaire permet d'obtenir

$$x(t) = \frac{mv_0}{qB}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right) + x_0 \; ; \; y(t) = \frac{mv_0}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \; .$$