

I'm a shooting star leaping through the sky

Like a tiger defying the laws of gravity

Don't Stop Me Now, Queen (1979)

Bibliographie

⚡ Cap Prépa Physique MPSI–PCSI–PTSI, Pérez, 2013 → Chapitre 13

De nombreux systèmes en rotation existent dans la nature comme par exemple les systèmes auto-gravitants : les galaxies sont un ensemble d'étoiles en rotation, ou une étoile peut être vu comme un fluide en rotation. Dans ces systèmes l'effet de l'attraction gravitationnelle s'exerçant entre les différents corps est équivalente à l'existence d'une force dirigée vers le centre du système. On rencontre souvent des situations analogues lorsque la force exercée sur un mobile est toujours dirigée vers un point fixe précis, on dit que le système est soumis à une force centrale.

Le problème à force centrale a été résolu pour la première fois par Newton en 1687, les études qui suivirent permirent de faire de nombreuses avancées quant au comportement du système solaire (mentionnons les travaux de Kepler). Mentionnons encore quelques autres exemples comme un ressort accroché en un point associé à une masse libre de se déplacer dans un plan, ou la diffusion Rutherford.

I Forces Centrales

1.1 Définition

⚡ Force centrale

Force \vec{F} exercée sur un point matériel M constamment dirigée vers un certain point fixe O appelé centre de force.

Dans la suite nous considérons que le référentiel d'étude est toujours galiléen et le centre de force fixe.

⚡ Moment d'une force centrale

Le moment d'une force centrale est toujours nul

$$\vec{M}_{\vec{F}, M/\mathcal{R}}^O = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r\vec{u}_r \wedge F\vec{u}_r = \vec{0}.$$

Exemples :

- la tension d'un fil attaché en un point O est une force centrale dirigée du point matériel M vers O ;
- la force d'attraction gravitationnelle est une force centrale dirigée du point matériel vers le centre attracteur ;
- la force électrostatique est une force centrale dirigée de la charge étudiée vers la charge attractrice.

1.2 Conséquences

⚡ Conservation du moment cinétique

Le moment cinétique (calculé en O) d'un point matériel M de masse m soumis à une force centrale de centre O l'origine du référentiel galiléen \mathcal{R} est constant lors du mouvement du point matériel car le moment des forces est nul.

A un instant donné, le mouvement d'un point matériel est dans le plan perpendiculaire au moment cinétique par définition. Ainsi un moment cinétique de direction constante \vec{u}_z implique que le mouvement se fait dans le plan (\vec{u}_x, \vec{u}_y) .

⚡ Mouvement plan

Un point matériel M soumis à une force centrale de centre O effectue un mouvement dans le plan fixe passant par O et perpendiculaire au moment cinétique $\vec{\sigma}_{M/\mathcal{R}}^O$.

Le mouvement étant astreint dans un plan et se faisant autour du point fixe O , il est judicieux de travailler en coordonnées polaires dans le plan $z = 0$. Dans ce repère, le moment cinétique calculé en O s'écrit

$$\vec{\sigma}_{M/\mathcal{R}}^O = \vec{OM} \wedge \vec{p}_{M/\mathcal{R}} = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z.$$

⚡ Constante des aires

Dans un mouvement à force centrale de centre O , le mouvement de M est caractérisé par une quantité conservée appelée la constante des aires

$$C = r^2\dot{\theta}.$$

Remarque : Le signe de C dépend de l'orientation choisie pour la plan et du sens de rotation (i.e. le signe de $\dot{\theta}$).

Remarque : Si le point matériel se rapproche de O alors r diminue et donc $\dot{\theta}$ augmente.

Si $C > 0$ alors le mouvement se fait dans le sens direct. Considérons un déplacement infinitésimale entre $M(t)$ et $M'(t+dt)$. dt étant infinitésimal, le déplacement entre M et M' peut être assimilé à au segment MM' en première approximation. Le triangle OMM' représente la surface balayée par le vecteur–position $\vec{r} = \vec{OM}$ au cours du déplacement infinitésimal. Soit dA l'aire du triangle OMM' alors,

$$|dA| = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge d\vec{r}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge (r\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta)| = \frac{1}{2} |r^2 d\theta|.$$

Loi des aires

Pour un intervalle de temps donné, la surface balayée par le vecteur–position est constant et indépendante de la position initiale du point matériel. Ceci peut s'écrire

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} C.$$

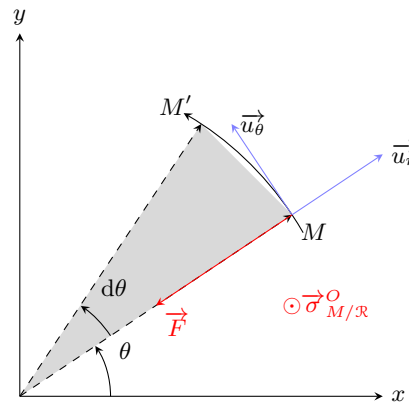


FIGURE 1 – Illustration de la loi des aires

Remarque : La quantité $\frac{dA}{dt}$ est appelée vitesse aréolaire, elle est positive pour un mouvement dans le sens direct et négative sinon.

Bilan

Confrontez à un problème comportant des forces centrales : bilan des forces et conservation du moment cinétique (TMC), mouvement plan, le mouvement vérifie la loi des aires.

? TD 22 App1

II Forces centrales conservatives

2.1 Définition

Soit une force centrale quelconque $\vec{F} = F(r, \theta)\vec{u}_r$, son travail élémentaire s'écrit $\delta W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F(r, \theta)dr$. La force centrale considérée est conservative si et seulement si son travail global ne dépend pas du chemin suivi, une solution simple est de considérer une force qui ne dépend que de la coordonnée radiale r .

Force centrale conservative

Toute force centrale de la forme $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$ est conservative. Elle dérive donc d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ telle que

$$F(r) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \text{ ou encore } \mathcal{E}_p(r) = -\int F(r)dr.$$

Remarque : La plupart des forces centrales ne dépendent que de la variable r .

2.2 Forces newtoniennes

Forces newtoniennes

On appelle force newtonienne une force pouvant s'écrire comme

$$\vec{F}_{new} = -\frac{\kappa}{r^2}\vec{u}_r;$$

où κ est un coefficient positif pour une force attractive et négatif pour une force répulsive. La force d'attraction gravitationnelle et la force électrostatique sont des forces newtoniennes.

De plus une telle force est associée à une énergie potentielle de la forme $\mathcal{E}_p = -\frac{\kappa}{r}$.

Remarque : Pour les forces gravitationnelle et électrostatique cela correspond à $\mathcal{E}_{p,gr} = -G\frac{m_1 m_2}{r}$ et $\mathcal{E}_{p,el} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Caractère attractif/répulsif

- Une force est attractive si $F(r) < 0$, ce qui correspond à une région où l'énergie potentielle est croissante.
- Une force est répulsive si $F(r) > 0$, ce qui correspond à une région où l'énergie potentielle est décroissante.

2.3 Énergie potentielle effective

Soit un point matériel M de masse m soumis à une force centrale conservative \vec{F} de centre O . En coordonnées polaires l'énergie mécanique du système s'écrit

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \mathcal{E}_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + \mathcal{E}_p(r).$$

⚡ Énergie potentielle effective

Un système tridimensionnel soumis à une force centrale dérivant de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ est formellement équivalent à un système unidimensionnel d'énergie mécanique

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,eff}(r) ;$$

avec le potentiel effectif $\mathcal{E}_{p,eff}(r) = \mathcal{E}_p(r) + \frac{mC^2}{2r^2}$.

? TD 22 Ex2

2.4 Classification des mouvements

On considérera le mouvement d'une particule M de masse m soumise à une force centrale newtonienne attractive de centre O . Dans ce cas le potentiel effectif s'écrit

$$\mathcal{E}_{p,eff}(r) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{mC^2}{2r^2} \text{ avec } \kappa > 0 .$$

- L'origine des potentiels est choisie arbitrairement, on peut donc prendre

$$\mathcal{E}_{p,eff} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 .$$

- Le potentiel effectif diverge en 0

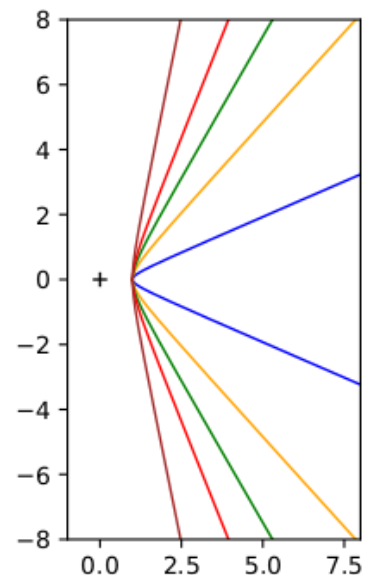
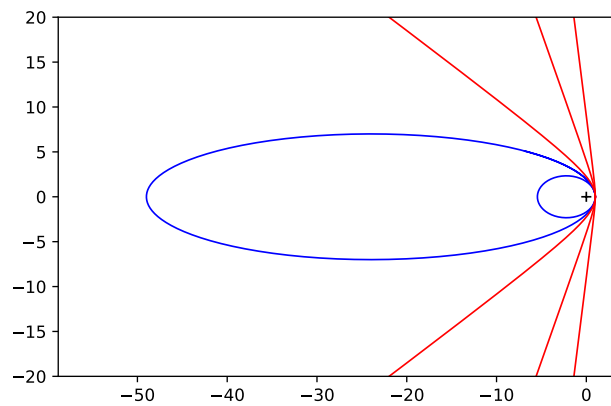
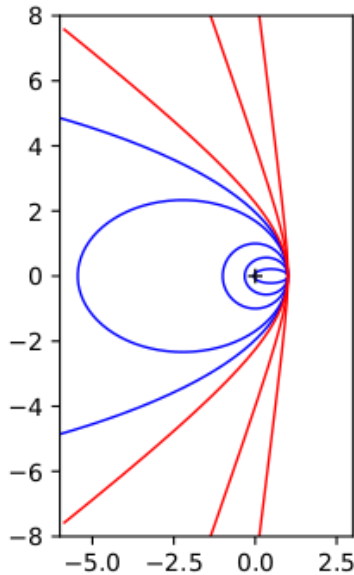
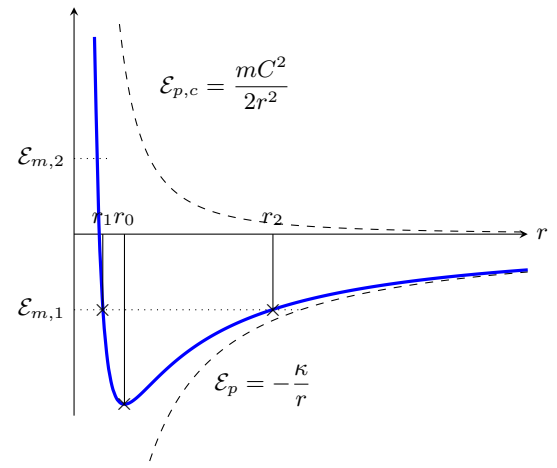
$$\mathcal{E}_{p,eff}(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} +\infty .$$

- L'étude de la fonction énergie potentielle montre l'existence d'un minimum en

$$r_0 = \frac{mC^2}{\kappa} .$$

L'énergie mécanique d'un tel système est constante, ainsi le point matériel ne peut accéder qu'au domaine où $\mathcal{E}_{p,eff}(r) \leq \mathcal{E}_m$.

- Si $\mathcal{E}_m < \mathcal{E}_{p,eff}(r_0)$ alors aucun mouvement n'est possible, il n'existe aucune solution aux équation du mouvement.
- Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,eff}(r_0)$ alors le seul mouvement correspond à $r = r_0$, **trajectoire circulaire**.
- $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,1} < 0$ alors r varie sur l'intervalle $[r_1, r_2]$, c'est un **état lié** suivant une **trajectoire elliptique**.
- $\mathcal{E}_m = 0$ alors r est borné inférieurement uniquement, c'est un **état de diffusion** suivant une **trajectoire parabolique**.
- $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,2} > 0$ alors r est borné inférieurement uniquement, c'est un **état de diffusion** suivant une **trajectoire hyperbolique**.



De même nous pouvons étudier une force centrale newtonienne répulsive en prenant $\kappa < 0$. C'est par exemple le cas de l'interaction entre deux charges électriques de même signe. Dans cas il n'existe que des états de diffusions. C'est par exemple le modèle qu'a utilisé Rutherford pour sonder la matière et étudier la répartition de charges électrique dans la matière (Expérience de Rutherford, 1911). C'est ce qui lui permis de poser les bases d'un modèle planétaire pour l'atome, modèle revu et corrigé par Neils Bohr deux ans plus tard.

☞* Ernest Rutherford 1871–1937 : physicien néo-zélandais et prix Nobel de chimie 1908.

☞* Neils Bohr 1885–1962 : physicien danois et prix Nobel de physique 1922.

III Trajectoires dans un champ newtonien

On dit qu'un système se déplace dans un champ newtonien quand il n'est soumis qu'à une force centrale newtonienne.

3.1 Mouvement circulaire

L'énergie potentielle effective associée à une force newtonienne s'écrit (cf précédemment) $\mathcal{E}_{p,eff}(r) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{mC^2}{2r^2}$. La trajectoire circulaire correspond au minimum de cette énergie potentielle $r = r_0 = \frac{mC^2}{\kappa}$. En ce point l'énergie cinétique radiale est nulle car la distance entre le centre de force et le système est constante.

⚡ Énergie mécanique d'un système soumis à une force newtonienne sur une trajectoire circulaire

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\kappa}{2r_0}.$$

Dans ce cas le point M parcourt une trajectoire fermée de rayon r_0 à la vitesse angulaire constante $\dot{\theta} = C/r_0^2$.

Le mouvement est périodique.

Le PFD appliqué à ce système s'écrit

$$m \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{Dt} = -\kappa \frac{\vec{OM}}{|\vec{OM}|^3} \vec{u}_r \text{ avec } \kappa > 0 \implies \begin{cases} mr_0 \dot{\theta}^2 = \frac{\kappa}{r_0^2}; \\ mr_0 \ddot{\theta} = 0. \end{cases}$$

- La première équation conduit à $\frac{\kappa}{r_0^2} = mr_0 \omega^2 = mr_0 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ une relation entre le rayon de la trajectoire et la période.
- La seconde équation confirme que la vitesse angulaire est constante.

⚡ Relation rayon/période d'une trajectoire circulaire

La période T et le rayon r_0 d'un système en mouvement circulaire et soumis à une force centrale newtonienne sont reliés. Dans le cas de l'attraction gravitationnelle cette relation s'écrit

$$\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_0}.$$

avec M_0 la masse du centre attracteur et \mathcal{G} la constante de la gravitation universelle.

3.2 Satellites géostationnaires

Un satellite géostationnaire est un satellite placé en orbite de telle façon qu'il soit toujours à la verticale du même point terrestre. Ceci est très utile pour les télécommunication ou la télédiffusion. Considérons la Terre sphérique de rayon R_T et que le satellite soit soumis uniquement à l'attraction terrestre dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

- Toute trajectoire est inclus dans un plan comprenant le centre de la Terre et le vecteur-vitesse initiale du satellite.
- La trajectoire ne peut qu'avoir lieu dans le plan équatorial car la force centrale est dirigée vers le centre de la Terre.
- Soit N le point à la verticale du satellite, le satellite M reste au dessus de ce point si N et M ont même vitesse angulaire.
- La rotation de la Terre se fait à vitesse constante donc M se déplace à vitesse constante.

⚡ Trajectoire d'un satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire a une trajectoire circulaire dans le plan équatorial. Sa vitesse angulaire est constante et égale à celle de la Terre.

La relation période/rayon de la trajectoire circulaire conduit à un rayon $r_0 \sim 42,2 \cdot 10^3 \text{ km}$.

⚡ Altitude d'un satellite géostationnaire

L'altitude d'un satellite géostationnaire est donc $h = r_0 - R_T \sim 35,8 \cdot 10^3 \text{ km}$.



TD 22 Pb1

3.3 Vitesses cosmiques

⚡ Première vitesse cosmique

Vitesse minimale à fournir à un corps pour le placer en orbite autour de la Terre.

On parle d'orbite basse, cela correspond à une orbite circulaire de rayon égal au rayon terrestre. Le PFD conduit aux relations suivantes

$$\begin{cases} mR_T\ddot{\theta} = 0 ; \\ mR_T\dot{\theta}^2 = \mathcal{G}\frac{M_T m}{R_T^2} . \end{cases} \quad \text{La seconde équation permet d'exprimer la vitesse } v_1 = R_T\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}} \sim 7,9 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 28,5 \cdot 10^3 \text{ km/h.}$$

Remarque : Spoutnik 1 (URSS), lancé le 4 octobre 1957 est le premier objet mis en orbite par l'homme.

⚡ Deuxième vitesse cosmique

Vitesse minimale pour arracher un corps à l'attraction terrestre.

Cela correspond à l'état de diffusion d'énergie le plus faible

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_2^2 - \mathcal{G}\frac{M_T m}{R_T} = 0 \implies v_2 = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}} \sim 11,2 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 40,3 \cdot 10^3 \text{ km/h} .$$

Remarque : La sonde Luna 1 (URSS), lancé le 2 janvier 1959, fut le premier objet créé par l'homme à dépasser cette vitesse de libération.

⚡ Troisième vitesse cosmique

Vitesse minimale pour arracher un objet à l'attraction du système solaire au départ de la Terre.

Cette vitesse s'élève à $v_3 = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_S}{d_{TS}}} \sim 42,3 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 152 \cdot 10^3 \text{ km/h}$.

Remarque : En pratique la Terre est en mouvement ce qui contribue à la vitesse du corps.

Remarque : Voyager 1 (USA), lancée le 5 septembre 1977 a quitté l'héliosphère en août 2012.

3.4 Lois de Kepler

L'étude des trajectoires planétaires par Tycho Brahé date de la fin du XVI^{ème} siècle et fut réalisé sans l'aide de lunettes ou télescopes. Ces études conduisirent à trois résultats expérimentaux connus sous le nom des lois de Kepler. Elles se généralisent à tout objet se déplaçant dans un champ newtonien.

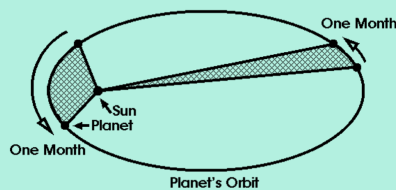
☞* *Tycho Brahé 1546–1601 : astronome danois.*

⚡ Première loi de Kepler

Dans le référentiel héliocentrique, chaque planète décrit une trajectoire elliptique dont le Soleil occupe un des deux foyers.

⚡ Deuxième loi de Kepler (loi des aires)

Dans le référentiel héliocentrique, l'aire balayée par le rayon vecteur Soleil-planète est proportionnel au temps mis pour la décrire.



⚡ Troisième loi de Kepler

Dans le référentiel héliocentrique, le carré de la période est proportionnel au cube du demi-grand axe de la trajectoire $T^2 \propto a^3$.

Remarque : En première approximation la trajectoire de la Terre autour du Soleil est circulaire avec $T_0 = 365,25 \text{ jr}$, $a_0 = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ km}$.

Remarque : Les trajectoires ne sont pas exactement elliptiques car les planètes interagissent entre-elles et perturbent ce modèle approximatif ou seul le Soleil influence une planète. C'est analysant ces déviations par rapport au modèle de Kepler que Urbain Le Verrier découvrit l'existence de Neptune en 1846.

☞* *Urbain Le Verrier 1811–1877 : astronome français.*

? TD 22 App3

3.5 État lié

⚡ Péricentre et Apocentre

Le point P le plus proche du centre attracteur est appelé péricentre (ou périhélie pour un satellite autour de la Terre, ou périhélie pour une satellite autour du Soleil), tandis que A le plus éloigné est appelé apocentre (ou apogée, ou aphélie).

En P et A la distance radiale est extrémale, i.e. $\dot{r} = 0$ et la vitesse est orthoradiale.

$$\frac{1}{2}mv_P^2 = \mathcal{E}_m + \frac{\kappa}{r_{min}} > \mathcal{E}_m + \frac{\kappa}{r_{max}} = \frac{1}{2}mv_A^2.$$

Ainsi le point matériel atteint le maximum de sa vitesse en P et le minimum en A . La distance $AP = 2a$ est le grand axe de l'ellipse et a le demi-grand axe de l'ellipse.

L'énergie aux points A et P est purement potentielle $\mathcal{E}_m = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\kappa}{r}$. Les distances r_{max} et r_{min} sont donc les racines d'une équation du seconde degré en r . Ainsi leur somme vérifie $r_{min} + r_{max} = -\frac{\kappa}{\mathcal{E}_m} = 2a$

⚡ Énergie mécanique d'un point matériel soumis à une force centrale newtonienne

L'énergie d'un point mobile sur sa trajectoire elliptique est reliée au demi-grand axe par la relation

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\kappa}{2a}.$$

3.6 Trajectoire conique (démonstration hors programme)

Partons du PFD projeté sur la direction \vec{u}_r : $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\kappa}{r^2}$.

Nous allons utiliser un "artifice" appelé les formule de Binet, cela consiste en réécrire la vitesse et l'accélération en fonction de θ plutôt que du temps afin d'obtenir l'équation de la trajectoire. Posons $u(\theta) = 1/r(t)$ alors

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{u} \right) = -\dot{\theta} \frac{u'}{u^2} = -r^2 \dot{\theta} u' = -Cu' ; \ddot{r} = \frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} (-Cu') = -C(r^2 u^2) \dot{\theta} u'' = -C^2 u'' u^2.$$

Ainsi la partie radiale du PFD devient

$$m(-C^2 u^2 u'' - C^2 u^3) = -\kappa u^2 \implies u'' + u = \frac{\kappa}{mC^2}.$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique dont la solution s'écrit $u(\theta) = A \cos(\theta + \phi) + B$ avec $B = \frac{\kappa}{mC^2}$. Ceci conduit à l'expression suivante, qui s'avère être l'équation d'une conique

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta + \phi)} \text{ avec } p = \frac{mC^2}{\kappa} ; e = pA.$$

Les coniques sont une famille de courbes

- cercle si $e = 0$;
- ellipse si $0 < e < 1$;
- parabole si $e = 1$;
- hyperbole si $e > 1$.

IV Expérience de Rutherford



Analyse Documentaire – DM