TD 03 (Chap. 02) – Propagation des ondes

I Questions de cours

1. Définir une perturbation mécanique et la notion d'onde propagative. Distinguer onde transversale et longitudinale.

2. Définir une onde progressive, en donner une représentation graphique et mathématique (expression générale).

3. Représenter de deux façon une onde progressive harmonique monochromatique et en définir les caractéristiques (période, pulsation...)

4. Définir la notion d'onde stationnaire : ventre, noeuds, découplage spatio–temporel.

5. Phénomène de diffraction et relation entre angle de diffraction et les caractéristiques du problème.

II Applications directes du cours

App1 Notes pour un instrument à vent

Un instrument de musique se modélise par une cavité de longueur l, fermée à une extrémité et ouverte à l'autre. On rappelle que la vitesse du son dans l'air est de 340m.s^{-1}.

1. Quelle doit-être la longueur du tube pour que la plus faible fréquence d'une onde stationnaire dans cet instrument soit le La3 à $f_1 = 440\text{Hz}$?

2. Quelle est la fréquence f_2 immédiatement supérieure pouvant être émise par cet instrument ?

3. Exprimer de manière générale, en fonction d'un entier n, les fréquences f_n pouvant être émises par l'instrument.

4. Où doit-on placer un trou dans l'instrument pour supprimer la fréquence f_2 du spectre du son émis ?

App2 La flûte de Pan

La flûte de Pan est un instrument de musique à vent composé d'un ensemble de tuyaux sonores de longueurs différentes assemblés par des ligatures. Chaque tuyau possède une extrémité à l'air libre et l'autre est fermée. Les sons émis sont produits par les vibrations des colonnes d'air contenues dans les différents tuyaux. La hauteur du son émis dépend de la longueur du tuyau : un long tuyau produit un son plus grave qu'un tuyau court. Nous considérons l'un des tuyaux, fermé en $x = 0$ et ouvert en $x = L$, et cherchons une solution de type stationnaire pour la surpression acoustique dans ce tuyau $p(x,t) = p_0 \cos(kx + \phi) \cos(\omega t + \phi_0)$ où ω est la pulsation de l'onde et $\lambda = 2\pi/k$ sa longueur d'onde. La célérité du son dans l'air est $c = 342\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

1. Qu'appelle-t-on nœuds et ventres de vibration ?

2. Montrer que deux nœuds ou deux ventres successifs sont distants de $\lambda/2$, un nœud et un ventre successifs sont distants de $\lambda/4$.

En $x = 0$, à l'extrémité fermée des tuyaux de la flûte de pan se situe un ventre de vibration, tandis qu'en $x = L$, à l'extrémité ouverte des tuyaux (où on souffle) se situe un nœud de vibration.

3. Quelles sont des fréquences propres du tuyau ?

4. Quelle longueur L doit posséder le tuyau pour émettre un Do3 de fréquence 262 Hz ?

App3 Un peu de diffraction

Un dispositif optique est équipé d'une fente de largeur $a = 10\mu\text{m}$, éclairée par différent laser. On place un écran 50cm derrière la fente.

1. Quelle est la largeur, au niveau de l'écran, de la tache de diffraction quand la fente est éclairée par un laser rouge hélium-néon ($\lambda = 632,8\text{nm}$) ? un laser vert ($\lambda = 532\text{nm}$) ? un laser bleu ($\lambda = 445\text{nm}$) ?

2. Qu'observerait-on avec un laser blanc ?

App4 Forme des ondes

Soit un signal $\alpha sin(2\pi f t)$ avec $\alpha > 0$ et $f > 0$ émis par un générateur en $x = 0$ vers les x décroissants pendant $[0, \tau]$. Il se propage à la célérité c. On donne $\tau = 1/(2f)$. Représenter l'évolution dans le temps du signal en $x = 0$. Représenter l'allure du signal dans l'espace à $t = 2\tau$.

App5 Ondes progressives

1. Donner la période, la fréquence, la pulsation, le nombre d'onde et la longueur d'onde de l'onde décrite par

$$s(x,t) = 5\sin(2,4.10^3\pi t - 7,0\pi x + 0,7\pi).$$

2. Une onde sinusoïdale se propage dans la direction des x positifs avec la célérité c. En $x=0$, on a $s(0,t) = S_0\cos(2\pi t/T)$. Donner l'expression de $s(x,t)$ et tracer l'allure du signal temporel perçu en $x = \lambda/4$.

3. Une onde sinusoïdale se propage dans la direction des x négatifs avec la célérité c. En $t=0$, on a $s(x,0) = S_0\cos(2\pi x/\lambda)$. Donner l'expression de $s(x,t)$ et tracer l'allure du signal spatial perçu en $t = T/4$.

4. En $x=0$ on excite un train d'ondes :

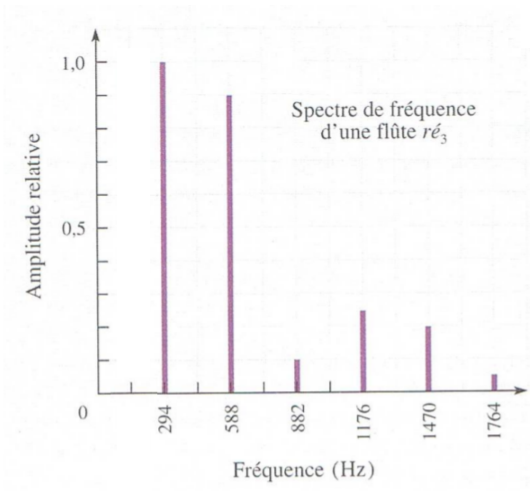
$$s(0,t) = S_0\exp\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right)\cos(2\pi t/T),$$

avec $T = 0,2\,\text{s}$ et $\tau = 1\,\text{s}$. L'onde se propage dans la direction des x positifs à la célérité $c = 2\text{m.s}^{-1}$. Donner l'expression de $s(x,t)$.

App6 Spectre d'une flûte (vrai ou faux)

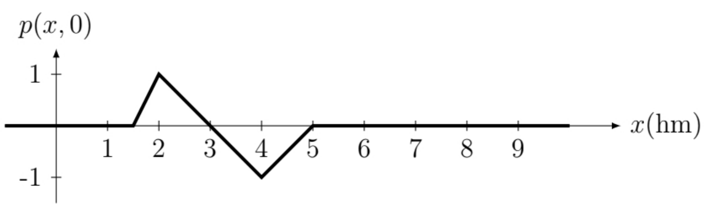
– La figure ci-dessous donne le spectre d'une flûte jouant le ré^3 (294Hz). Il ressort clairement du diagramme que la flûte est vraisemblablement

- ouverte à une seule extremité,
- de longueur 66 cm,
- ouverte à ses deux extrémités,
- fermée à ses deux extrémités,
- aucune de ces réponses.



App7 Onde progressive

On considère une onde p(x, t) se propageant à la célérité $c = 20\,\text{km}\text{h}^{-1}$ selon la direction et le sens de l'axe Ox sans déformation. À l'instant $t_0 = 0$, le profil de l'onde a l'allure suivante.



1. Faire un schéma du profil de l'onde à $t = 1.5\,\text{min}$.

2. À quel instant l'onde arrive-t-elle au point A d'abscisse $x_A = 2.0\,\text{km}$?

3. Un détecteur fixe est placé à l'abscisse $x_D = 1.4\,\text{km}$, tracer l'allure des variations de $p(x_D,t)$ en fonction de t.

4. Déterminer la durée de la perturbation.

App8 Signal sur une corde vibrante

Une corde immobile à l'instant initial et suffisamment longue est soumise à un vibreur (situé en $x=0$) qui y engendre des oscillations sinusoïdales de fréquence f. Une photographie de la corde à $\tau = 0.060\,\text{s}$ après le début des oscillations montre que la corde est ébranlée sur une longueur correspondant à 3λ. La célérité de l'onde est de $c = 6\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

1. Faire un schéma de la corde à l'instant $\tau = 0.060\,\text{s}$.

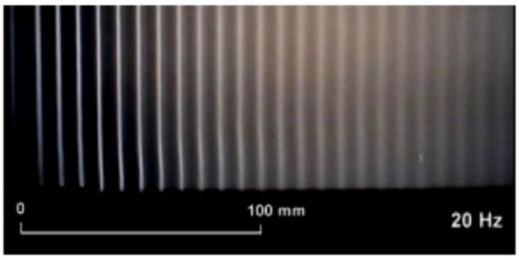
2. Calculer la fréquence f et la longueur d'onde λ des oscillations.

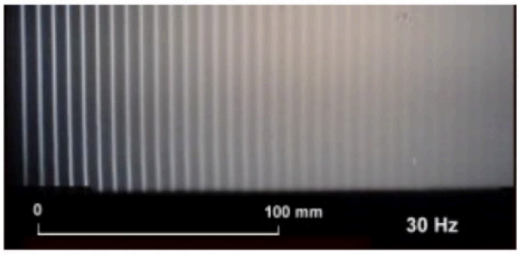
Le vibreur vibre verticalement suivant l'équation $y(t) = -5\sin(\omega t)$ en cm.

3. Écrire le signal $y(x,t)$ en fonction de x, t, ω et c.

App9 Caractère dispersif de la cuve à onde

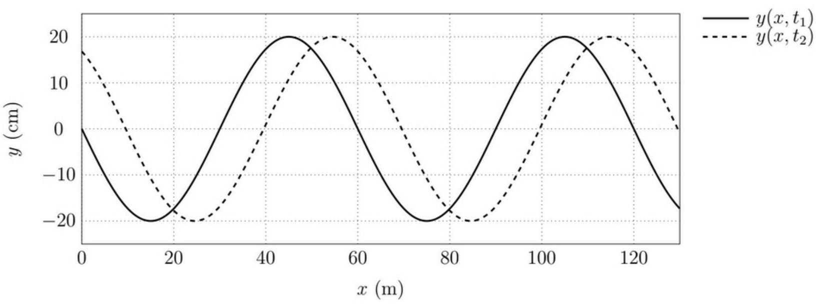
À l'aide d'une baguette accrochée à un pot vibrant, on réalise des ondes bidimensionnelles dans une cuve à onde. À l'aide des deux photographies, montrer que la cuve est un milieu dispersif, c'est-à-dire dans lequel la célérité de l'onde dépend de la fréquence de l'onde.





App10 Emportées par la houle

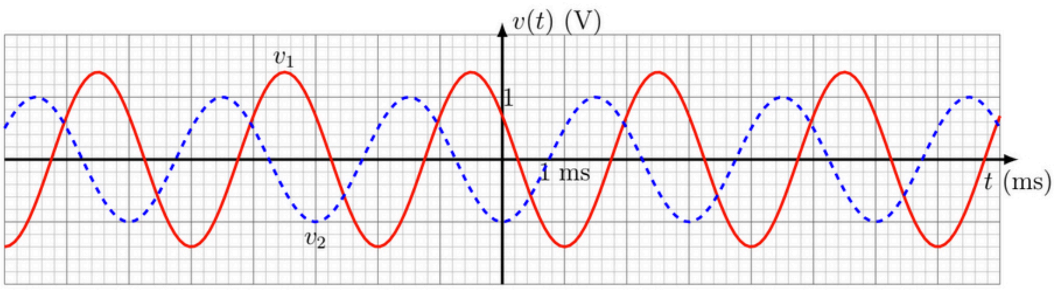
La houle est un mouvement ondulatoire de la surface de la mer formé par un vent lointain. Nous l'assimilerons ici pour simplifier à une onde harmonique se propageant le long d'un axe O_x. Nous notons $y(x,t)$ l'ordonnée du point de la surface de la mer qui se trouve en x à l'instant t. La fonction $y(x,t)$ est représentée sur la figure à deux instants différents $t_1 = 0.0\,\text{s}$ et $t_2 = 1.0\,\text{s}$. Nous admettons que t_2 est inférieur à la période T de l'onde.



1. Dans quel sens se propage l'onde ?
2. Déterminer sa longueur d'onde λ, sa période T et sa vitesse propagation c.
3. Proposer une écriture de $y(x,t)$.
4. Emportées par la houle qui les traîne et les entraîne, deux mouettes se trouvent aux abscisses $x_1 = 0.0\,\text{m}$ et $x_2 = 5.0\,\text{m}$ à la surface de l'eau. Peut-on dire que la houle les éloigne l'une de l'autre ? Représenter sur le même graphe l'évolution de l'ordonnée de deux mouettes (assimilées à deux points sur la surface de l'eau) en fonction du temps.

App11 Mesure d'un déphasage

Un haut–parleur situé à l'origine O de l'axe (O_x) émet une onde sonore sinusoïdale se propageant dans le sens des x croissants. On place en deux points distincts deux micros. Les deux signaux $v_1(t)$ et $v_2(t)$ récupérés en sortie des deux micros sont représentés ci-dessous.



1. Donner par lecture graphique l'amplitude, la valeur moyenne, la période et la fréquence de chacune des tensions. Les deux tensions sont-elles synchrones ?

2. La tension v_2 est-elle en avance ou en retard par rapport à v_1 ? Quel est le décalage temporel associé ?

3. En déduire le déphasage.

4. Donner la phase à l'origine des deux tensions.

III Exercices

Ex1 Flûte et clarinette

Une clarinette se modélise par une cavité de longueur L fermée à une extrémité et ouverte à l'autre. La vitesse du son dans l'air aux conditions normales de température et de pression est $c = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

1. Quelle doit être la longueur L pour que la plus faible fréquence d'une onde stationnaire dans cet instrument soit $f_1 = 147\,\mathrm{Hz}$?

2. Quelle est la fréquence f_2 immédiatement supérieure pouvant être émise par ce tube ?

3. Dans la pratique, pour pouvoir réaliser la note à la hauteur f_2, il faut ouvrir un trou qui s'appelle ≪ trou de registre ≫ situé à environ $L/3$ de l'embouchure. Expliquer comment ce trou permet d'empêcher le mode propre le plus bas d'apparaître tout en permettant aux autres modes d'exister.

4. Exprimer de manière générale, en fonction d'un entier n, les fréquences f_n pouvant être émises par cet instrument, tous trous fermés.

Ex2 Note fondamentale d'un instrument à vent

Un tuyau sonore peut-être le siège d'ondes acoustiques stationnaires qui vont dépendre des conditions aux limites imposés aux deux extrémités. La figure ci-contre représente un tuyau cylindrique dont l'extrémité gauche est fermée et l'extrémité droite est ouverte sur l'air.

1. Justifier qualitativement que la pression acoustiques (l'écart de la pression par rapport à la pression statique) présente un ventre de vibration du coté fermé et noeud de vibration du coté ouvert.
Un instrument à vent peut être considéré comme un tuyau sonore de longueur L. Il se comporte donc, pour certaine fréquence, comme un résonateur siège d'un système d'onde stationnaires de longueur d'onde λ. Ces fréquences sont les modes propres de l'instrument et correspondent aux notes qu'il est capable de générer.

2. Une flûte traversière peut être modélisé par un tuyau ouvert à ses deux extrémités. Faire un dessin de l'onde stationnaire dans le tuyau sonore correspondant à la note fondamentale, la note la plus basse générée par l'instrument. Déterminer la longueur de l'instrument pour que son fondamental soit la note mi$_3$ de fréquence $f_1^{\mathrm{fl}} = 330\mathrm{Hz}$.

3. L'anche d'une clarinette est assimilée à une extrémité fermée. Refaire un dessin de l'onde stationnaire dans le tuyau sonore correspondant à la note fondamentale, c'est-à-dire de plus grande longueur d'onde. Sa longueur étant sensiblement la même que la flûte traversière, en déduire sa fréquence fondamentale f_1^{cl}. Lequel de ces instruments est le plus grave.

4. Dans "Pierre et le loup", lequel des instruments Prokofiev a-t-il choisi pour représenter l'oiseau ? le chat ?

5. Montrer que les notes harmoniques sont régulièrement espacées en fréquence et que l'écart Δf entre deux harmoniques successifs est le même pour la flûte et la clarinette ; quel est cette écart ?

Données : $c = 340\mathrm{m/s}$

Ex3 Onde le long d'une corde

Une corde tendue très longue est excitée à l'une de ses extrémités par un mouvement transversal d'amplitude $A = 10\,\mathrm{cm}$ et d'équation $y(t) = A\sin\dfrac{2\pi t}{T}$.

1. Établir l'équation de l'onde progressive $y_M(x,t)$ se propageant dans la corde dans le sens des x croissants. Expliquer ce qu'on entend par double périodicité de ce phénomène. La corde a une masse de $m = 100\,\mathrm{g}$ pour $l = 10\,\mathrm{m}$ de longueur, et elle est tendue avec une tension $F = 15\,\mathrm{N}$.

2. La célérité c de l'onde le long de la corde dépend des trois paramètres précédents. Par analyse dimensionnelle, déterminer l'expression de c (On admettra que le coefficient adimensionné devant vaut 1).

3. Calculer la célérité c du phénomène de propagation ainsi que sa longueur d'onde λ sachant que la fréquence vaut $f = 16\,\mathrm{Hz}$.

4. Écrire l'équation du mouvement d'un point M distant de $5\,\mathrm{m}$ de la source. Calculer son élongation à l'instant $t = 2.5\,\mathrm{s}$.

5. À quelle distance se trouvent deux points voisins vibrant en opposition de phase. Cette distance dépend-elle de la tension F ?

6. Comment faut-il faire varier la tension de la corde pour doubler la longueur d'onde ?

Ex4 Spectre d'une somme ou d'un produit de deux signaux sinusoïdaux

Considérons les deux tensions $u_1(t) = U_1 \cos(2\pi f_1 t)$ et $u_2(t) = U_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi)$ avec $U_1 = 10\,\mathrm{V}$, $U_2 = 5.0\,\mathrm{V}$, $f_1 = 40\,\mathrm{Hz}$, $f_2 = 60\,\mathrm{Hz}$ et $\Phi = 3\pi/4$. Un montage additionneur permet d'obtenir la tension somme, $u_s(t) = u_1(t) + u_2(t)$.

1. Tracer le spectre d'amplitude et de phase de u_s.

2. S'agit-il d'une tension périodique ? Déterminer sa fréquence.

Un autre montage électronique, dit multiplieur, permet d'obtenir cette fois une tension $u_p(t) = k \times u_1(t) \times u_2(t)$ où $k = 0.2\,\mathrm{V}^{-1}$ est une constante caractéristique du montage.

3. Déterminer les fréquences contenues dans le spectre de u_p.
On rappelle la formule de trigonométrie $cos(a)cos(b) = \frac{1}{2}\left(cos(a+b) + cos(a-b)\right)$.

4. Représenter le spectre d'amplitude de u_p.

5. Que se passerait-il si les deux tensions étaient synchrones (de même fréquence) ?

Ex5 Mesure du diamètre d'un cheveu

Thomas réalise une expérience de diffraction en utilisant un laser rouge de longueur d'onde dans le vide λ_0. Il souhaite déterminer le diamètre de son cheveu. Il place devant le faisceau laser des fils verticaux de différents diamètres a. Il observe la figure de diffraction sur un écran placé à la distance $D = 2.0\,\mathrm{m}$ du fil. Pour chaque fil, il mesure la largeur de la tache de diffraction centrale qui est notée L. À partir de ces mesures, il peut en déduire l'écart angulaire θ du faisceau diffracté.

1. Donner la relation mathématique qui relie θ à L et D.

2. Quelle relation a-t-on entre l'angle de diffraction θ, la longueur d'onde du laser et le diamètre du fil ?

3. Compte-tenu du fait que $D \gg L$, $\theta \ll 1$, on peut écrire $\tan(\theta) \simeq \theta$ et $\sin(\theta) \simeq \theta$ (avec θ en radian). Écrire les deux relations précédentes dans le cadre de cette approximation.

4. On obtient les mesures expérimentales suivantes

a(mm)	0.10	0.050	0.080	0.010	0.020	1.0
L(cm)	2.5	5.1	3.2	25.3	12.6	0.3
θ(rad)						

Compléter le tableau en donnant les valeurs de l'angle de diffraction et tracer la courbe qui représente θ en fonction de $1/a$. Quel type de courbe obtient–on ? Conclure.

5. Déterminer la longueur d'onde de la lumière utilisée à partir des résultats expérimentaux.

6. Thomas place maintenant son cheveux devant le faisceau laser et il trouve une tache de diffraction de largeur $L = 2.0\,\mathrm{cm}$. Quel est le diamètre de son cheveux ?

Ex6 Longueur d'onde et fréquence dans une cuve à ondes

On considère une cuve à ondes (c'est-à-dire une cuve remplie avec un peu d'eau et disposant d'un système qui permet la visualisation des ondes) excitée par un dispositif de fréquence variable ν. Le dispositif est éclairé par un stroboscope émettant un flash très bref toutes les périodes T_0.

1. Qu'observe-t-on lorsque $T_0 = 1/\nu$?

2. Existe–t–il d'autres valeurs de T_0 conduisant à la même observation ?

3. Pour déterminer la longueur d'onde, on mesure la distance radiale correspondant à l'écart entre 11 rides. Comment en déduire la longueur d'onde ? Quelle est l'intérêt de cette méthode ?

On donne, pour différentes valeurs de fréquence ν_k, la longueur d'onde λ_k déduite de la mesure.

ν_k(Hz)	30.0	40.0	50.0	60.0
λ_k(mm)	7.67	5.75	4.61	3.83

4. Quelle relation doit–on retrouver entre ces valeurs ?

5. Valider le modèle et déterminer la célérité de l'onde grâce à une régression linéaire.

IV Problèmes

Pb1 Analyse de documents : Observation de Bételgeuse

L'étoile Bételgeuse est une supergéante rouge située dans la constellation d'Orion. Elle est distante de 197 parsecs du système solaire. Son diamètre est estimé à 830 fois celui du Soleil.

1. Déterminer son diamètre apparent dans le ciel.

La résolution théorique d'un télescope (ou d'une parabole) est la taille angulaire du plus petit détail que peut imager le télescope s'il n'est limité que par la diffraction : $\theta_{lim} = \dfrac{1,22 \times \lambda}{d_{tel}}$.

2. Cette étoile peut-elle être résolue par un télescope amateur de 10cm de diamètre ? par l'un des télescopes européens du VLT au Chili, de $8,2$m de diamètre, travaillant dans le proche infrarouge à $2,2\mu$m ?

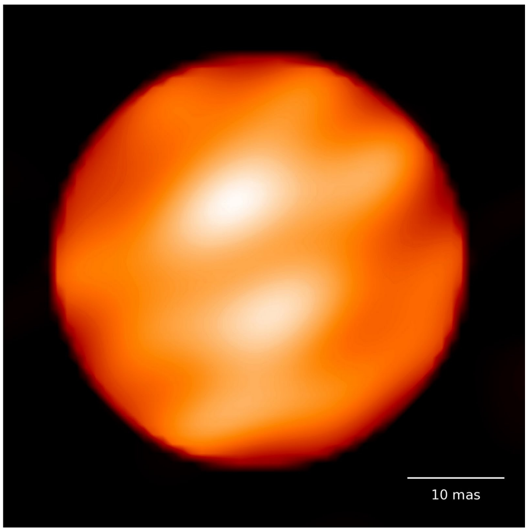
Pour aller au-delà de la limite de résolution d'un télescope, on utilise une technique appelée interférométrie. Elle consiste à utiliser plusieurs télescopes à la fois, et à faire interférer la lumière issue de chacun d'eux. On montre que la résolution d'un interféromètre est donnée par la relation

$$\theta_{\text{lim}} = \frac{\lambda}{B}$$

où B, appelée base de l'interféromètre, est la plus grande distance séparant 2 télescopes.

3. Quelle est la résolution de l'interféromètre européen VLTI, de base $B = 240$m et observant à $1,65\mu$m ? Quelle est la résolution de l'interféromètre américain CHARA, de base $B = 330$m observant à $2,2\mu$m ? Peuvent-ils résoudre Bételgeuse ?

4. Déduire de la photo ci-dessous la base de l'interféromètre utilisé. L'observation s'est faite à $\lambda = 1,65\mu$m.



<u>Données :</u>

rayon solaire : $R_\odot = 7.10^5$km ; parsec : $1\,\text{pc} = 3,1.10^{16}$m ; milliseconde d'angle : $1\,\text{mas} = 4,8.10^{-9}$rad.

Pb2 Un petit air de guitare

La guitare classique comporte six cordes en boyau ou nylon, alors que les guitares électriques et les guitares folk sont équipées de cordes métalliques. Le doublement de fréquence d'un son correspond à un changement d'octave. La gamme tempérée divise l'octave en douze intervalles égaux appelés demi–tons.

Les fréquence successives f_p des notes espacées de ces demi–tons vérifient la loi $f_p = 2^{p/12} f_9$ avec $p \in [\![1, 12]\!]$. On donne la célérité c d'une onde dans la corde en fonction des paramètres de cette $c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ avec μ la masse linéique de la corde et T sa tension.

Données :

Note	Do3	Do#	Ré	Mib	Mi	Fa	Fa#	Sol	Lab	La	Sib	Si	Do4
f(Hz)	261.5	277	294	311	330	349	370	392	415	440	466	493	523

Remarque : Mi et Fa ainsi que Si et Do ne sont séparés que d'un demi–ton et pas d'un ton !

Corrolaire : ≪ Je propose de faire une opération en Si#... c'est–à–dire une opération comme en Do. ≫

Le savart permet de quantifier l'écart de hauteur entre deux sont. L'écart en savarts entre deux fréquences f_1 et f_2 vaut par définition

$$s_{12} = 10^3 \log \frac{f_2}{f_1} \, .$$

Les fréquences fondamentales des cordes de guitare sont Mi1, La1, Ré2, Sol2, Si2 et Mi3.

1. Déterminer la fréquence correspondant à chacune des six cordes de la guitare.

On travaille avec des cordes de longueur 63 cm, en acier $\rho_a = 7800\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, nylon $\rho_n = 1180\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ou boyau $\rho_b = 975\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Numéro de corde	1	2	3	4	5	6
Note fondamentale	Mi1	La1	Ré2	Sol2	Si2	Mi3
Diamètre de la corde en mm	1.12	0.89	0.70	0.55	0.35	0.25

2. Déterminer les tensions nécessaires pour que la guitare électrique soit parfaitement accordée (mode fondamental).

3. Comparer pour une corde (la 4ème par exemple) l'influence du matériau constituant la corde sur la force de tension (en supposant le diamètre constant).

4. Quelle est la variation relative qui peut être tolérée sur la tension de la 4ème corde pour que la fréquence du fondamental correspondant ne varie pas de plus de cinq savarts (limite de séparation moyenne de l'oreille humaine) ? Faire l'application numérique pour une corde en acier.

5. Le guitariste déplace sa main sur une ou plusieurs cordes afin de faire varier la distance entre les extrémités fixes. De quelle distance déplace–t–il son doigt sur la 4ème corde pour passer du Sol2 au La 2 ?