Dans les feuilles de TD, les compétences utilisées sont indiquées avec le code suivant :

- Cou : savoir appliquer le cours
- Com : savoir communiquer, établir une rédaction propre
- Cal : calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme
- Rai : raisonner, argumenter
- Rep : représenter
- Rec : stratégies, s'engager dans une recherche
- Mod : modéliser

Le symbole 𝄞 signifie qu'il s'agit dans un exercice classique et donc à bien connaître.
Le symbole © signifie que l'exercice est corrigé sur CDP (la liste des exercices corrigés est susceptible d'évoluer).
Le symbole YT signifie que l'exercice est corrigé sur Youtube.
Le nombre d'étoiles ⋆ indique la difficulté (relativement subjectif).

Propositions et quantificateurs

Exercice 1 (⋆ Cou)**.** Donner la négation de chaque proposition :

1. Chaque jour de l'année, s'il pleut, je prends mon parapluie.
2. Chaque été, il pleut au moins une journée en Bretagne.
3. Cet été, il a plu tous les jours en Normandie.
4. Il y a un élève de la classe qui a visité le mont Saint-Michel cet été [1].
5. Quelque soit l'élève de la classe, s'il travaille bien en CPGE alors il réussira à obtenir une école.
6. Chaque élève de la classe aime les maths et la physique.

Exercice 2 (⋆ Cou)**.** Les assertions sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\exists x\in\mathbb{R}\quad \exists y\in\mathbb{R}\quad x+y=1$
2. $\forall x\in\mathbb{R}\quad \forall y\in\mathbb{R}\quad x+y=1$
3. $\forall x\in\mathbb{R}\quad \exists y\in\mathbb{R}\quad x+y=1$
4. $\exists x\in\mathbb{R}\quad \forall y\in\mathbb{R}\quad x+y=1$
5. $\forall n\in\mathbb{N}, n>2\Longrightarrow n\geqslant 3$
6. $\forall x\in\mathbb{R}, x>2\Longrightarrow x\geqslant 3$
7. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^{*2}, x<y\Rightarrow \dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$

Exercice 3 (⋆ Rai ©)**.** Soit F un ensemble de fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{P}$ la proposition «$\exists x\in\mathbb{R}\quad \forall f\in F\quad f(x)=0$» et $\mathscr{Q}$ la proposition «$\forall f\in F\quad \exists x\in\mathbb{R}\quad f(x)=0$» Est-ce que $\mathscr{P}$ implique $\mathscr{Q}$? Et la réciproque ?

1. En Bretagne ou en Normandie ?

Exercice 4 (⋆ Cou)**.** Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs réelles. Écrire la négation des propositions suivantes.

1. $\exists m\in\mathbb{R}\quad \forall x\in I\quad f(x)\geqslant m$
2. $\forall x\in I\quad \exists y\in\mathbb{R}\quad f(x)=y$
3. $\exists c\in\mathbb{R}\quad \forall x\in I\quad f(x)=c$
4. $\exists x_0\in I\quad \forall x\in I\quad f(x)\leqslant f(x_0)$

Exercice 5 (⋆ Rai)**.** Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs réelles.

1. Traduire avec des quantificateurs les énoncés suivants :
   1. f est positive.
   2. f est croissante.
   3. f est strictement croissante.
   4. f est majorée.
   5. f est la fonction nulle.
   6. f est une fonction paire.
   7. f s'annule.
   8. f s'annule une unique fois.
   9. f s'annule au plus une fois.
   10. f est une fonction constante.
   11. f admet un minimum.
2. Donner la négation avec des quantificateurs de ces énoncés.

Raisonnements

Exercice 6 (⋆ Rai ©)**.** Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Montrer par contraposée :

$$(\forall\varepsilon>0\quad x<\varepsilon)\quad\Longrightarrow\quad x=0$$

Exercice 7 (⋆⋆ Rai ©)**.** Démontrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 8 (𝄞⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** Déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall m\in\mathbb{N}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad u_{m+n}=u_m+u_n$

Exercice 9 (⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** On note G l'ensemble des fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$ et on note H l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables en 0 valant 0 en 0 et dont la dérivée en 0 vaut aussi 0. Montrer que pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 0 il existe $g\in G$ et $h\in H$ telles que $f=g+h$.

Exercice 10 (⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** Trouver les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, pour tout $x'\in\mathbb{R}_+^*$, $f(xx')=f(x)+f(x')$.

Exercice 11 ($\star$ Rai, Com ©).

1. Soit $u_0 \in \,]\,0\,;\pi/2\,[$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \,]\,0\,;\pi/2\,[$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3^n$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n-1)$.
4. $\star\star$ Montrer que tout entier $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

Exercice 12 ($\star\star$ Rai ©). Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha^n + \dfrac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}$.
2. Donner un exemple d'un tel α (avec $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -1$).

Exercice 13 ($\star\star$ Rai ©). Soit I un intervalle d'extrémités α et β : $I = [\,\alpha\,;\beta\,]$ ou $I = [\,\alpha\,;\beta\,[$ ou $I = \,]\,\alpha\,;\beta\,]$ ou $I = \,]\,\alpha\,;\beta\,[$, on suppose que la longueur de l'intervalle vérifie $\beta - \alpha < 1$. Démontrer que I contient au plus un entier.

Exercice 14 ($\star\star\star$ Rai, Rec ©). Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_N$ dans $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ tel que

$$n = \sum_{k=0}^{N} a_k 10^k = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \ldots + a_N 10^N$$

(décomposition d'un nombre en base 10). Généraliser le résultat pour la décomposition d'un nombre en base b avec un entier $b \geqslant 2$.

Exercice 15 ($\star\star\star$ Rai, Rec).

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p(2q+1)$. On note $\nu(n) = p$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\nu(2n+1) = 0$ et $\nu(2n) = \nu(n) + 1$.

On pose $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = 0$ si $u_{n-1} = 0$ et $u_n = 1 + 2\nu(n) - \dfrac{1}{u_{n-1}}$ si $u_{n-1} \neq 0$.

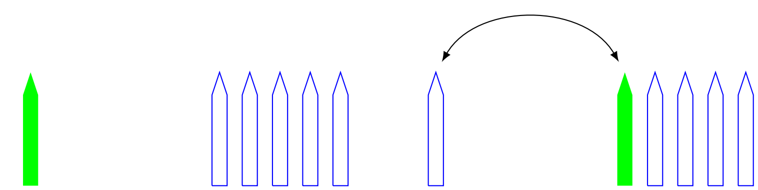
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathbb{Q}$.
4. Calculer u_8.
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, $u_{2n} = u_n + 1$ et $u_{2n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.
6. Soit $r \in \mathbb{Q}_+^\star$, démontrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $u_n = r$.
7. Démontrer qu'il existe un unique entier $n \geqslant 1$ tel que $u_n = r$.

Exercice 16 ($\star\star\star$ Rai, Rec ©). Soit f une fonction définie sur $[\![\,1\,;n\,]\!] = [\,1\,;n\,] \cap \mathbb{N}$ à valeurs dans $[\![\,1\,;n\,]\!]$ croissante. Montrer qu'il existe $k \in [\![\,1\,;n\,]\!]$ tel que $f(k) = k$ (on dit que k est un point fixe de f).

Exercice 17 ($\star\star$ Rai ©). Démontrons par récurrence que que tous les crayons d'un paquet ont la même couleur : $\mathscr{P}(n)$: «Les crayons d'un paquet de n crayons ont tous la même couleur».

- Pour $n = 1$, il y a un seul crayon de couleur donc une seule couleur, ainsi $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est. Prenons un paquet de $n+1$ crayons. Séparons ce paquet en deux : un crayon d'une part et n crayons de l'autre. Alors, tous les crayons du groupe de n crayons ont nécessairement la même couleur d'après $\mathscr{P}(n)$. On remet dans le paquet le crayon que l'on a isolé et on retire un autre crayon. Alors en utilisant encore une fois $\mathscr{P}(n)$, tous les crayons du nouveau paquet de n crayons ont la même couleur y compris celui qu'on avait initialement retiré. Ainsi tous les crayons ont la même couleur. Dès lors, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Où est l'erreur ?



(a) Étape 1 : un groupe avec un crayon tout seul et un autre avec n crayons qui ont tous la même couleur d'après $\mathscr{P}(n)$.

(b) Étape 2 : on échange deux crayons, l'ancien crayon isolé se retrouve dans un paquet de n crayons donc a la même couleur que les autres d'après $\mathscr{P}(n)$.