



Chapitre 2

Études des fonctions et fonctions usuelles

Le but de ce chapitre est de faire le point en début de PCSI sur les notions d'analyse liées aux fonctions à valeurs réelles dont la variable est réelle pour adopter un vocabulaire précis, rigoureux et commun. Nous allons revoir les notions de la classe de Terminale nécessaires à l'étude complète d'une fonction sans pour autant démontrer tous les résultats. Ceux-ci le seront dans des chapitres ultérieurs (limites, continuité, dérivabilité, etc). Puis nous (re)verrons les fonctions usuelles dont les propriétés doivent être maîtrisées.

Table des matières

1 Généralités sur les fonctions	2
1.1 Définition d'une fonction	2
1.2 Parité, périodicité	2
1.3 Opérations sur les fonctions	3
1.4 Variation d'une fonction	3
1.5 Fonctions minorées, majorées, bornées	4
1.6 Bijektivité	4
1.7 Dérivée d'une fonction	5
2 Fonctions usuelles	6
2.1 Logarithme	6
2.2 La fonction exponentielle	6
2.3 Fonctions puissances	7
2.4 La valeur absolue	8
2.5 Fonctions trigonométriques	8
2.6 Fonctions trigonométrique réciproques	9
2.7 Fonctions hyperboliques	10
3 Représentation graphique des fonctions usuelles	10

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Définition d'une fonction

Définition d'une fonction

Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. On appelle **fonction réelle définie sur D et à valeurs dans A** , un procédé qui, à $x \in D$, associe un élément noté $f(x) \in A$ et appelé **image** de x par f . On note alors $f: D \rightarrow A$. On dit que D est le **domaine de définition** de la fonction f (ou **ensemble de départ**) et A l'**ensemble d'arrivée**. Si $y = f(x)$, on dit que x est un **antécédent** de y par f .

Exemple 1. Quelle est l'image de 0 par la fonction \cos ? Quels sont les antécédents de 1 par \cos ?

Exemple 2. La fonction $f: \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow [1; +\infty[\\ x \longmapsto \frac{1}{x^2} + 2 \end{cases}$ est définie sur \mathbb{R}^* à valeurs dans $[1; +\infty[$.

Remarque 1. D est donc une partie de \mathbb{R} (pas nécessairement un intervalle) sur laquelle la fonction f est bien définie.



Péril imminent à ne pas confondre fonction et nombre

Si $f: D \rightarrow A$ est une fonction et $x \in D$, alors $f(x)$ est un nombre. Ainsi, « $f(x)$ est dérivable» n'a aucun sens.

Définition du graphe d'une fonction

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, on appelle **graphe** ou **courbe** de f l'ensemble des points : $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$. Le graphe d'une fonction est donc l'ensemble des points du plan dont l'ordonnée est l'image de l'abscisse.

Définition de l'image d'une fonction

Soit $f: D \rightarrow A$. L'**image** de f , notée $f(D)$, est l'ensemble des images des éléments de D par f : $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$.



Attention à ne pas confondre image d'une fonction et son ensemble d'arrivée

Il est juste de dire que $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, en effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \in \mathbb{R}^+$. Cependant, $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$. D'une manière générale, si $f: D \rightarrow A$, on a toujours $f(D) \subset A$ mais pas forcément égalité.

1.2 Parité, périodicité

Définition d'une fonction paire/impaire

Soit D un ensemble de \mathbb{R} symétrique par rapport à 0 : pour tout $x \in D$, $-x \in D$. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

- On dit que f est **paire** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$: \mathcal{C}_f symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On dit que f est **impaire** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$: \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple 3. La fonction $x \mapsto x^2$ est paire, la fonction $x \mapsto x^3$ est impaire.

Définition d'une fonction périodique

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **périodique** s'il existe un réel $T > 0$ tel que :

$$\forall x \in D \quad x + T \in D \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x)$$

Ce réel T est appelé **une période** de f (on dit aussi que f est T -périodique).

Si elle existe, on appelle **période fondamentale** de f la plus petite période de f .

Exemple 4. 6π est une période de \sin , mais la période fondamentale de \sin est 2π .

Remarque 2. Savoir si une fonction est paire/impaire/périodique permet de réduire son domaine d'étude.

1.3 Opérations sur les fonctions

On connaît les opérations usuelles $(+, -, \times, \div)$ entre les nombres réels. Cependant, les fonctions n'étant pas des nombres, il faut définir la somme, le produit ou le quotient de deux fonctions, ou encore le produit d'un réel par une fonction.



Définition des opérations sur les fonctions

Soient $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on appelle :

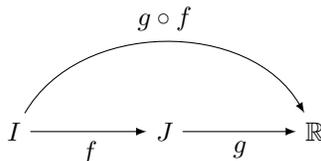
- $f + g$ la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $f(x) + g(x)$.
- λf la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $\lambda f(x)$.
- fg la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $f(x)g(x)$.
- Si, pour tout $x \in D$, $g(x) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $\frac{f(x)}{g(x)}$.



Définition de la composée de deux fonctions

Soient $f: I \rightarrow J$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$. La **fonction composée** de g et f , notée $g \circ f$ est définie par, pour tout $x \in I$,
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Remarque 3. La composée se déroule suivant le schéma :



Exemple 5. Si $f: x \mapsto x^2$ et $g: x \mapsto \cos(x)$, alors $g \circ f: x \mapsto \cos(x^2)$ et $f \circ g: x \mapsto \cos^2(x)$

Remarque 4. En général (et même très souvent), $f \circ g \neq g \circ f$. Si jamais $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définies et que $f \circ g = g \circ f$, on dit que les fonctions f et g **commutent**.

1.4 Variation d'une fonction



Définition d'une fonction (strictement) croissante, décroissante, monotone, constante

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- f est dite **croissante sur** D si $\forall (x, x') \in D^2 \quad x \leq x' \implies f(x) \leq f(x')$
- f est dite **décroissante sur** D si $\forall (x, x') \in D^2 \quad x \leq x' \implies f(x) \geq f(x')$
- f est dite **strictement croissante sur** D si $\forall (x, x') \in D^2 \quad x < x' \implies f(x) < f(x')$
- f est dite **strictement décroissante sur** D si $\forall (x, x') \in D^2 \quad x < x' \implies f(x) > f(x')$
- f est dite (resp. strictement) monotone sur D si f est (resp. strictement) croissante ou décroissante sur D .
- On dit que f est constante sur D , s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $f(x) = C$.

Exemple 6. La fonction \sin n'est pas croissante sur \mathbb{R} ni décroissante sur \mathbb{R} , elle n'est donc pas monotone sur \mathbb{R} . En revanche, elle est strictement croissante sur $[-\pi/2; \pi/2]$ et est donc strictement monotone sur cet intervalle.



Proposition n° 1 : variation d'une composée de deux fonctions monotones

Soient $f: I \rightarrow J, g: J \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si f est croissante sur I et g est croissante sur J , alors $g \circ f$ est croissante sur I .
2. Si f est strictement croissante sur I , et g est strictement croissante sur J , alors $g \circ f$ est strictement croissante sur I .
3. Si f est croissante sur I et g est décroissante sur J , alors $g \circ f$ est décroissante sur I .
4. Si f est décroissante sur I et g est croissante sur J , alors $g \circ f$ est décroissante sur I .
5. Si f est décroissante sur I et g est décroissante sur J , alors $g \circ f$ est croissante sur I .

1.5 Fonctions minorées, majorées, bornées



Définition d'une fonction minorée, majorée, bornée

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que la fonction f est **majorée** sur D si : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \leq M$
- On dit que la fonction f est **minorée** sur D si : $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \geq m$
- On dit que f est **bornée** sur D si f est majorée et minorée : $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in D \quad m \leq f(x) \leq M$

Remarque 5. On dit que m est un **minorant** de f et M est un **majorant** de f . S'ils existent, les minorants/majorants ne sont pas uniques!

Exemple 7. La fonction \exp est minorée sur \mathbb{R} par -4 mais n'est pas majorée et n'est pas bornée. La fonction \sin est bornée sur \mathbb{R} : 5 est un majorant et -3 est un minorant de \sin .



Proposition n° 2 : une fonction est bornée ssi sa valeur absolue est bornée

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est bornée D ssi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D, |f(x)| \leq M$.

1.6 Bijectivité



Définition d'une bijection et bijection réciproque

On dit que $f: I \rightarrow J$ est **bijective** si tout $y \in J$ admet un unique antécédent par f dans I i.e. :

$$\forall y \in J \quad \exists! x \in I \quad y = f(x)$$

En notant $x = f^{-1}(y)$, on définit une application $f^{-1}: \begin{cases} J \longrightarrow I \\ y \longmapsto x = f^{-1}(y) \end{cases}$ appelée **bijection réciproque** de f .

Exemple 8. Montrer que l'application $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x + 2 \end{cases}$ est bijective et trouver sa bijection réciproque.



Proposition n° 3 propriétés d'une bijection

Si f est une bijection de I vers J .

1. $\forall x \in I \quad f^{-1}(f(x)) = x$ et $\forall y \in J \quad f(f^{-1}(y)) = y$ $(f^{-1} \circ f = \text{Id}_I \text{ et } f \circ f^{-1} = \text{Id}_J)$
2. f^{-1} réalise une bijection de J vers I et $(f^{-1})^{-1} = f$.
3. \mathcal{C}_f et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Théorème n° 1 : de la bijection strictement monotone

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction continue et strictement monotone sur I . Alors $f: I \rightarrow f(I)$ est bijective et $f(I)$, suivant les cas, vaut :

Intervalle	$I = [a; b]$	$I = [a; b[$	$I =]a; b]$	$I =]a; b[$
f strictement croissante	$[f(a); f(b)]$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$
f strictement décroissante	$[f(b); f(a)]$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$	$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$

Exemple 9. $f: x \mapsto x^3$ est une bijection de $[-1; 2[$ vers $[-1; 8[$.

Remarque 6. On verra plus tard que si f est continue sur un intervalle I , alors $f(I)$ est nécessairement un intervalle.

1.7 Dérivée d'une fonction

À partir de maintenant $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle de \mathbb{R} .



Définition du nombre dérivé en un point a

On dit que f est **dérivable en** $a \in I$ si $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie en a . Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé de f en a** et est noté $f'(a)$: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Remarque 7. La fonction f est dérivable en a ssi $h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Dans ce cas, $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Exemple 10. Montrer que la fonction carrée est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$.



Proposition n° 4 : lien entre nombre dérivé et tangente

Si f est dérivable en $a \in I$, alors f admet une tangente en a ayant pour équation : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Remarque 8. Le signe de $f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))$ détermine la position relative de la courbe par rapport à sa tangente.



Définition d'une fonction dérivable et fonction dérivée

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable sur** I si f est dérivable en tout point de I . Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée** l'application $f': \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$.

Remarque 9. Cette fonction dérivée f se note aussi en physique $\frac{df}{dx}$. Quand la variable est t , on a aussi la notation $\frac{df}{dt}$ ou même $\dot{\theta}$ pour des fonctions angulaires.



Proposition n° 5

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un même ensemble I alors :

- Combinaison linéaire : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + g$ est dérivable sur I et
- Produit : la fonction fg est dérivable sur I et
- Quotient : Si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)' &= \lambda f' + g' \\ (fg)' &= f'g + fg' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}$$



Proposition n° 6 : composée de fonctions dérivables

Soient $f: I \rightarrow J$ dérivable sur I et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur J . Alors, $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$

Exemple 11. Dériver $x \mapsto \cos(x^2)$, $x \mapsto \exp(u(x))$, $x \mapsto \ln(u(x))$, $x \mapsto \sin(u(x))$, $x \mapsto (u(x))^n$, où u est une fonction dérivable (strictement positive dans le cas du \ln) et $n \in \mathbb{N}$.



Théorème n° 2 : dérivation de la bijection réciproque

Soient $f: I \rightarrow J$ une bijection et $x \in J$. Si f est dérivable en $a = f^{-1}(x)$ et que $f'(a) \neq 0$, alors, $f^{-1}: J \rightarrow I$ est dérivable en x et :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Remarque 10. Géométriquement, les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques à la droite d'équation $y = x$. La condition $f'(a) \neq 0$ est nécessaire car sinon f admettrait une tangente horizontale en a et f^{-1} admettrait une tangente verticale en x .



Proposition n° 7 : lien entre la dérivée et les fonctions constantes, (strictement) monotones

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors :

- f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
- f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ et si f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement croissante.

2 Fonctions usuelles

2.1 Logarithme



Définition du logarithme népérien

L'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_+^* qui s'annule en 1 est appelée fonction **logarithme népérien** et est notée \ln .



Proposition n° 8 : propriétés du logarithme

Pour tous $x > 0$ et $x' > 0$:

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$
3. \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
4. $\ln(xx') = \ln(x) + \ln(x')$
5. $\ln(1/x') = -\ln(x')$
6. $\ln(x/x') = \ln(x) - \ln(x')$
7. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n \ln(x)$
8. $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$.
9. La fonction \ln réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} .
10. Pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

Remarque 11. Le logarithme en base 10 (resp 2) est défini par, pour tout $x > 0$, $\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ (resp. $\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$). Ces fonctions ont des propriétés similaires au logarithme népérien, mais $\log_{10}(10) = 1$ et que $\log_2(2) = 1$.

2.2 La fonction exponentielle



Définition de la fonction exponentielle

On appelle **exponentielle** la bijection réciproque de $\ln: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ et on note \exp cette fonction. Ainsi, $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une bijection.



Proposition n° 9 : propriétés de la fonction exponentielle

Pour tout $(x, x', y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$:

1. $y = \exp(x) \iff x = \ln(y)$.
2. $\exp(0) = 1$
3. \exp est dérivable sur \mathbb{R} et $\exp'(x) = \exp(x)$
4. $\exp(x + x') = \exp(x) \exp(x')$
5. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
6. $\exp(x - x') = \frac{\exp(x)}{\exp(x')}$
7. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(x)^n = \exp(xn)$
8. $\exp(x) \geq 1 + x$
9. $\exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

Remarque 12. On peut montrer que \exp est la seule fonction dérivable égale à sa dérivée et prenant la valeur 1 en 0.

Remarque 13. Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, on peut définir la fonction exponentielle en base a par $x \mapsto a^x = \exp(x \ln(a))$. On obtient une fonction qui vaut a en 1, qui transforme les sommes en produit et dont la dérivée est $x \mapsto \ln(a)a^x$.

2.3 Fonctions puissances



Définition de la puissance

On définit x^α dans plusieurs cas :

- Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}}$, par convention $x^0 = 1$.
- Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}_-$, alors on pose pour $x \in \mathbb{R}^*$, $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$
- Sinon, on pose pour $x > 0$, $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$.

Dans chacun de ces cas, on a défini une fonction $x \mapsto x^\alpha$ définie soit sur \mathbb{R} , soit sur \mathbb{R}^* , soit sur \mathbb{R}_+^* .



Attention à ne pas confondre puissance et exponentielle

Les fonctions $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto x^a$ ne doivent pas être confondus !



Proposition n° 10 : propriétés de la fonction puissance

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{*2}$.

1. $x^\alpha \times y^\alpha = (xy)^\alpha$, $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ et $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
2. $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x > 0$, $(p_\alpha)'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
3. Sur \mathbb{R}_+^* , p_α est strictement croissante si $\alpha > 0$ et strictement décroissante si $\alpha < 0$.
4. Si $\alpha > 0$, $x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, $x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
5. Si $\alpha < 0$, $x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, $x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$.

Remarque 14. Si $\alpha > 0$, on pose $p_\alpha(0) = 0$, ainsi la fonction p_α est maintenant définie et continue sur \mathbb{R}_+ (et non \mathbb{R}_+^*).



Exemple la fonction racine n-ième

- Si $n \in \mathbb{N}^*$ est pair, $x \mapsto x^n$ est une bijection de \mathbb{R}_+ vers \mathbb{R}_+ et sa bijection réciproque est notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$
- Si $n \in \mathbb{N}$ est impair, $x \mapsto x^n$ de \mathbb{R} vers \mathbb{R} et sa bijection réciproque est $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Remarque 15. Pour $x > 0$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.



Proposition n° 11 : croissances comparées

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

- | | | | |
|--|---|---|--|
| 1. $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ | 3. $\frac{x}{\exp(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ | 5. $x \exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ | 7. $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ |
| 2. $\frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ | 4. $\frac{x^\beta}{\exp(\alpha x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ | 6. $ x ^\beta e^{\alpha x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ | 8. $x^\alpha \ln(x) ^\beta \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ |

2.4 La valeur absolue



Définition de la valeur absolue

La fonction $x \mapsto |x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$, définie sur \mathbb{R} , est appelée valeur absolue.



Proposition n° 12 : propriétés de la valeur absolue

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- | | |
|--|--|
| 1. $ -x = x $ | (la valeur absolue est une fonction paire) |
| 2. $ xy = x \times y $ | (la valeur absolue du produit est le produit des valeurs absolues) |
| 3. $ x + y \leq x + y $ | (inégalité triangulaire) |
| 4. $ x - y \leq x - y $ | (deuxième inégalité triangulaire) |
| 5. $ x \leq r \iff -r \leq x \leq r, x < r \iff -r < x < r, x = r \iff x = \pm r, x \geq r \iff x \geq r \text{ ou } x \leq -r$ | |

2.5 Fonctions trigonométriques



Définition des fonctions cosinus et sinus

Soit $x \in \mathbb{R}$, on note M le point du cercle trigonométrique tel que un angle entre \vec{i} et \overrightarrow{OM} soit x . On note $\cos(x)$ l'abscisse de M et $\sin(x)$ son ordonnée. On a donc défini deux fonctions $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$ et $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$.

Remarque 16. Si $x = y + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors ils définissent le même point M sur le cercle trigo. On note alors $x \equiv y [2\pi]$.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	NaN

Remarque 17. Il faut savoir retrouver les cosinus et sinus de $x \pm \pi$ et $\pi/2 \pm x$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

**Proposition n° 13 : propriétés des fonctions cos et sin**

1. sin est impaire, 2π -périodique
2. cos est paire, 2π -périodique,
3. $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$
4. $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$
5. $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$
6. $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$
7. sin dérivable sur \mathbb{R} avec $\sin' = \cos$.
8. cos dérivable sur \mathbb{R} avec $\cos' = -\sin$.
9. $\cos(a)^2 + \sin^2(a) = 1$
10. $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$
11. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1$
12. $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$, $\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$.
13. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

Remarque 18. Grâce à ces formules, on peut trouver une formule de $\cos(a) \cos(b)$, $\sin(a) \cos(b)$ etc.

Remarque 19. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(a) = \cos(b)$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z} \mid b = a + 2k\pi$ ou $b = -a + 2k\pi$ et $\sin(a) = \sin(b)$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z} \mid b = a + 2k\pi$ ou $b = \pi - a + 2k\pi$

**Définition de la fonction tangente**

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\cos(x) \neq 0$, on pose $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Ceci définit la fonction tangente.

**Proposition n° 14 : propriétés de la fonction tangente**

1. La fonction tan est impaire, π -périodique, dérivable sur $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et pour tout $x \in D_{\tan}$:

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
2. Si $(a, b, a+b) \in D_{\tan}^3$, alors $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, si $(a, b, a-b) \in D_{\tan}^3$, alors $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

2.6 Fonctions trigonométrique réciproques

Remarque 20. Les fonctions cos et sin ne sont pas des bijections de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ni tan de D_{\tan} vers \mathbb{R} .

**Proposition n° 15 : bijectivité des fonctions trigonométriques sur les «bons» intervalles**

$c: \begin{cases} [0; \pi] \longrightarrow [-1; 1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$, $s: \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1; 1] \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases}$ et $t: \begin{cases}]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) \end{cases}$ sont bijectives.

**Définition des fonctions trigonométriques réciproques**

- La bijection réciproque de $c: [0; \pi] \rightarrow [-1; 1]$ est appelée **arccos**: $[-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$.
- La bijection réciproque de $s: [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1; 1]$ est appelée **arcsin**: $[-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
- La bijection réciproque de $t:]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est appelée **arctan**: $\mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

Remarque 21. • Pour tout $x \in [-1; 1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$ et pour tout $x \in [0; \pi]$, $\arccos(\cos(x)) = x$.

• Pour tout $x \in [-1; 1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$ et pour tout $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$ et pour tout $x \in]-\pi/2; \pi/2[$, $\arctan(\tan(x)) = x$.

Exemple 12. Calculer, $\arctan(1)$, $\arcsin(0)$, $\arcsin(1)$, $\cos(\arccos(0))$, $\arccos(\cos(0))$, $\arccos(\cos(2\pi))$.

**Proposition n° 16 : propriétés des fonctions trigonométriques réciproques**

1. $\arccos: [-1;1] \rightarrow [0;\pi]$ est continue sur $[-1;1]$, dérivable sur $] -1;1[$ et pour tout $x \in] -1;1[$, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $\arcsin: [-1;1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ est impaire, continue sur $[-1;1]$, dérivable sur $] -1;1[$ et pour tout $x \in] -1;1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ est impaire, dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

2.7 Fonctions hyperboliques

Pour $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on rappelle qu'il existe une unique fonction paire $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = p + i$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

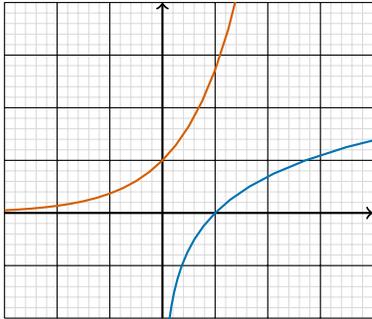
**Définition des fonctions cosinus et sinus hyperboliques**

On définit les fonctions cosinus hyperbolique $\text{ch}: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$ et sinus hyperbolique $\text{sh}: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$

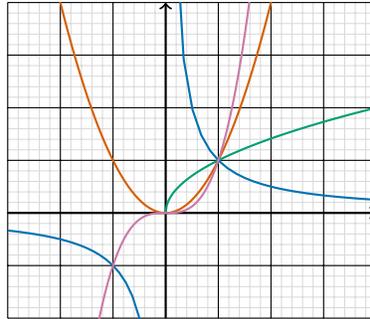
**Proposition n° 17 : propriétés des fonctions hyperboliques**

1. La fonction ch est paire et dérivable sur \mathbb{R} avec $\text{ch}' = \text{sh}$
2. La fonction sh est impaire et dérivable sur \mathbb{R} avec $\text{sh}' = \text{ch}$
3. $\text{ch}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, $\text{sh}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, $\text{ch}(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ et $\text{sh}(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$
5. La fonction sh est croissante sur \mathbb{R} et la fonction ch est croissante sur \mathbb{R}_+ et décroissante sur \mathbb{R}_- .
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) \geq 1$ et si $x \geq 0$, $\text{sh}(x) \geq 0$ et si $x \leq 0$, $\text{sh}(x) \leq 0$.

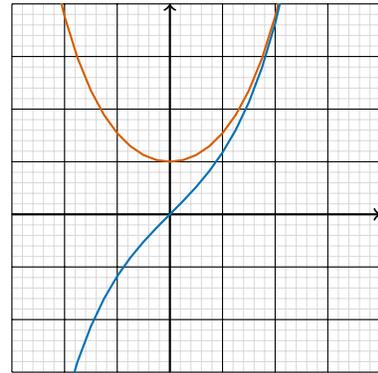
3 Représentation graphique des fonctions usuelles



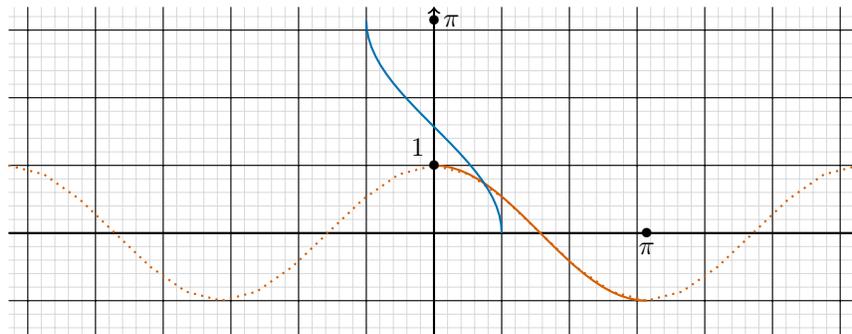
(a) Les fonctions **exponentielle** et **logarithme**



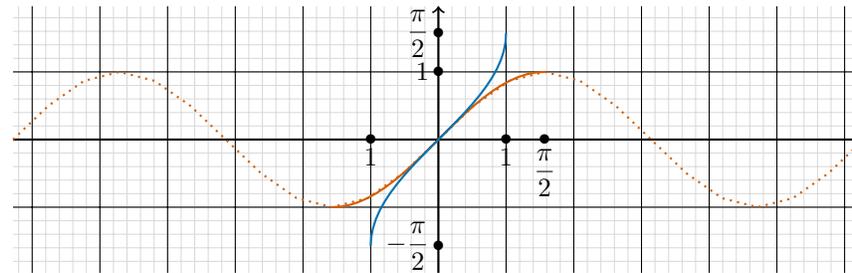
(b) Les fonctions **puissance**



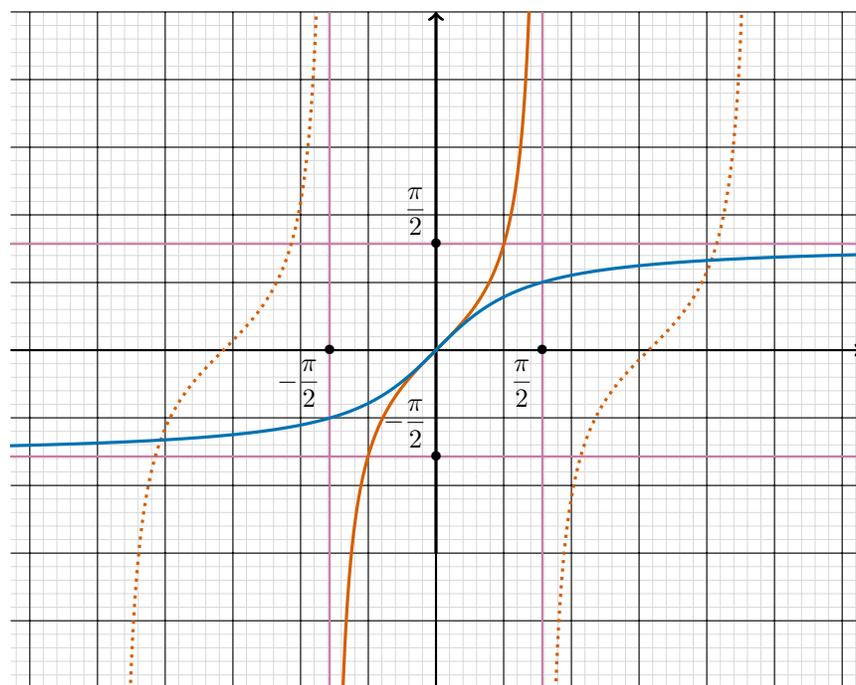
(c) Les fonctions **ch** et **sh**



(d) La fonction **cosinus** et la fonction **arccos**



(e) La fonction **sinus** et la fonction **arcsinus**



(a) La fonction \tan et la fonction \arctan