Chapitre 2
Études des fonctions et fonctions usuelles

Objectifs :

- Faire le point en début de PCSI sur l'étude des fonctions à valeurs réelles en adoptant un vocabulaire précis et rigoureux.
- Revoir les notions de la classe de Terminale ainsi que de nouveaux résultats nécessaires à l'étude complète d'une fonction sans pour autant démontrer tous les résultats. Ceux-ci le seront dans des chapitres ultérieurs (limites, continuité, dérivabilité, etc).
- Étudier les fonctions usuelles dont les propriétés doivent être maîtrisées.

Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté

Ce polycopié contient plusieurs animations, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Définition d'une fonction

Définition d'une fonction

Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. On appelle **fonction** réelle définie sur D à valeurs dans A, un procédé f qui, à $x \in D$, associe un unique élément, noté $f(x) \in A$, appelé **image** de x par f. On note alors $f\colon D \to A$. On dit que D est le **domaine de définition/ensemble de départ** de f et A l'**ensemble d'arrivée**. Si $y = f(x)$, on dit que x est un **antécédent** de y par f.

Exemples 1.
- Quelle est l'image de 0 par la fonction cos ? Quels sont les antécédents de 1 par $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?
- La fonction $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow [\,1\,;+\infty\,[\\ x \longmapsto \dfrac{1}{x^2} + 2 \end{cases}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $[\,1\,;+\infty\,[$.
- Posons $g\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto \ln(x+0.5) \end{cases}$ et $h\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(\cos(x)) \end{cases}$. Alors, g et h ne sont pas des fonctions.

Remarque 1. D est donc une partie de $\mathbb{R}$ (pas nécessairement un intervalle) sur laquelle la fonction f est bien définie.

Péril imminent à ne pas confondre fonction et nombre

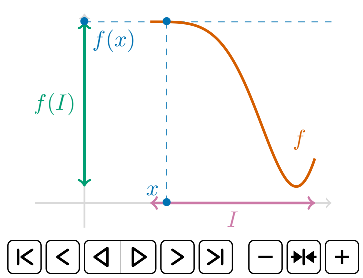
Si $f\colon D \to A$ est une fonction et $x \in D$, alors $f(x)$ est un nombre. Ainsi, « $f(x)$ est dérivable » n'a aucun sens.

Définition du graphe d'une fonction

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$, on appelle **graphe/courbe** de f l'ensemble des points : $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$. Le graphe d'une fonction est l'ensemble des points du plan dont l'ordonnée est l'image de l'abscisse.

Définition de l'image d'une fonction

Soit $f\colon D \to A$. L'**image** de f, notée $f(D)$, est l'ensemble des images des éléments de D par f : $f(D) = \{f(x) | x \in D\}$.



Attention à ne pas confondre image d'une fonction et son ensemble d'arrivée

Il est juste de dire que $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, en effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \in \mathbb{R}^+$. Cependant, $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$.
D'une manière générale, si $f\colon D \to A$, on a toujours $f(D) \subset A$ mais pas forcément égalité.

1.2 Parité, périodicité

Définition d'une fonction paire/impaire

Soit D un ensemble de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 : pour tout $x \in D$, $-x \in D$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$
- On dit que f est **paire** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$: $\mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On dit que f est **impaire** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$: $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.

Exemples 2. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est paire, la fonction $g : x \mapsto x^3$ est impaire.

Définition d'une fonction périodique

On dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est **périodique** si $\exists T > 0 \quad \forall x \in D \quad x + T \in D \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x)$
On dit que T est **une période** de f et que f est T-périodique. Si elle existe, on appelle **période fondamentale** de f la plus petite période de f.

Exemple 3. 6π est une période de sin, mais la période fondamentale de sin est 2π.

Remarque 2. Savoir si une fonction est paire/impaire/périodique permet de réduire son domaine d'étude.

1.3 Opérations sur les fonctions

On connaît les opérations usuelles $(+, -, \times, \div)$ entre les nombres réels. Cependant, les fonctions n'étant pas des nombres, il faut définir la somme, le produit ou le quotient de deux fonctions, ou encore le produit d'un réel par une fonction.

Définition des opérations sur les fonctions

Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on appelle :
- $f + g$ la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $f(x) + g(x)$, ainsi $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- λf la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $\lambda f(x)$, ainsi $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- fg la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $f(x)g(x)$, ainsi, $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
- Si, pour tout $x \in D$, $g(x) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, ainsi, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Définition de la composée de deux fonctions

Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. La **composée** de g et f, notée $g \circ f$, est définie par, pour tout $x \in I$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Remarques 3.
- La composée se déroule suivant le schéma :

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & J \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

- Si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définies, très souvent, $f \circ g \neq g \circ f$, si $f \circ g = g \circ f$, on dit que les fonctions f et g **commutent**.

Exemples 4.
- Si $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x + 1$, donner l'expression de $f \circ g$ et $g \circ f$.
- Est-ce que f et g commutent ?
- Quel est l'ensemble de définition de $x \mapsto \ln(x^2 - 3)$?

1.4 Variation d'une fonction

Définition d'une fonction (strictement) croissante, décroissante, monotone, constante

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$.

- f est dite **croissante** sur D si $\forall (x,x') \in D^2 \quad x \leqslant x' \implies f(x) \leqslant f(x')$
- f est dite **décroissante** sur D si $\forall (x,x') \in D^2 \quad x \leqslant x' \implies f(x) \geqslant f(x')$
- f est dite **strictement croissante** sur D si $\forall (x,x') \in D^2 \quad x < x' \implies f(x) < f(x')$
- f est dite **strictement décroissante** sur D si $\forall (x,x') \in D^2 \quad x < x' \implies f(x) > f(x')$
- f est dite (resp. **strictement**) **monotone** sur D si f est (resp. strictement) croissante ou décroissante sur D.
- On dit que f est **constante** sur D, s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $f(x) = C$.

Remarque 4. Si f est strictement croissante sur D alors pour tout $(x,x') \in D^2$, $x < x'$ ssi $f(x) < f(x')$.

Exemple 5. La fonction $f\colon x \mapsto x^2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ ni décroissante sur $\mathbb{R}$, elle n'est donc pas monotone sur $\mathbb{R}$. En revanche, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et est donc strictement monotone sur cet intervalle.

Proposition n° 1 : variation d'une composée de deux fonctions monotones

Soient $f\colon I \to J$, $g\colon J \to \mathbb{R}$.

1. Si f est (resp. strict.) croissante et g est (resp. strict.) croissante, alors $g \circ f$ est (resp. strict.) croissante.
2. Si f est croissante sur I et g est décroissante sur J, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.
3. Si f est décroissante sur I et g est croissante sur J, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.
4. Si f est décroissante sur I et g est décroissante sur J, alors $g \circ f$ est croissante sur I.

1.5 Fonctions minorées, majorées, bornées

Définition d'une fonction minorée, majorée, bornée

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$.

- On dit que la fonction f est **majorée** sur D si : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \leqslant M$
- On dit que la fonction f est **minorée** sur D si : $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \geqslant m$
- On dit que f est **bornée** sur D si f est majorée et minorée : $\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in D \quad m \leqslant f(x) \leqslant M$

Remarque 5. On dit que m est **un minorant** de f et M est **un majorant** de f. S'ils existent, les minorants/majorants ne sont pas uniques !

Exemples 6.
- La fonction exp est minorée sur $\mathbb{R}$ par -4 mais n'est pas majorée et n'est pas bornée.
- La fonction sin est bornée sur $\mathbb{R}$: 5 est un majorant et -3 est un minorant de sin.

Proposition n° 2 : une fonction est bornée ssi sa valeur absolue est majorée

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$. Alors f est bornée D ssi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $|f(x)| \leqslant M$.

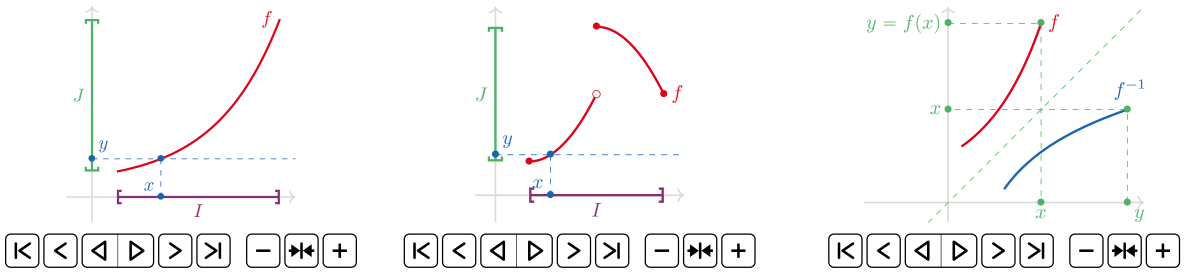
1.6 Fonction bijective

Définition d'une bijection et bijection réciproque

On dit que $f\colon I \to J$ est **bijective/une bijection** si tout $y \in J$ admet un unique antécédent par f dans I i.e. :

$$\forall y \in J \quad \exists! x \in I \qquad y = f(x)$$

On pose alors $f^{-1}(y) = x$, ceci définit une fonction $f^{-1}\colon \begin{cases} J \longrightarrow I \\ y \longmapsto f^{-1}(y) \end{cases}$ appelée **bijection réciproque** de f.



(a) f continue et strictement monotone.

(b) f non continue et non monotone.

(c) Construction de la bijection réciproque f^{-1}

FIGURE 1 – Fonctions $f: I \to J$ bijectives : pour tout $y \in J$, la droite horizontale de hauteur y coupe la courbe de f.

Exemple 7. Montrer que l'application $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x+2 \end{cases}$ est bijective et trouver sa bijection réciproque.

Proposition n° 3 : propriétés d'une bijection et de sa bijection réciproque

Si f est une bijection de I vers J.

1. $\forall x \in I \quad f^{-1}(f(x)) = x \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I$
2. $\forall y \in J \quad f(f^{-1}(y)) = y \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J$
3. $f^{-1}: J \to I$ est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$
4. $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à $y = x$

Théorème n° 1 de la bijection strictement monotone *(continuité admise, $f(I)$ admis provisoirement)*

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors $f: I \to f(I)$ est bijective et $f(I)$ vaut :

	$I = [\,a\,;b\,]$	$I = [\,a\,;b\,[$	$I =]\,a\,;b\,]$	$I =]\,a\,;b\,[$
f strict. croissante	$[\,f(a)\,;f(b)\,]$	$\left[f(a)\,; \lim\limits_{x\to b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,; f(b) \right]$	$\left] \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,; \lim\limits_{x\to b^-} f(x) \right[$
f strict. décroissante	$[\,f(b)\,;f(a)\,]$	$\left] \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,; f(a) \right]$	$\left[f(b)\,; \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \right[$	$\left] \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,; \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \right[$

De plus, $f^{-1}: f(I) \to I$ est continue sur $f(I)$ et est strictement monotone et de la même monotonie que f.

Exemples 8.
- $f: x \mapsto x^3$ est une bijection de $[\,-1\,;2\,[$ vers $[\,-1\,;8\,[$.
- Démontrer que $g: x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers un ensemble à déterminer.

Remarque 6. Quand on applique ce théorème toujours préciser les ensembles de départ et d'arrivé considérés. On verra plus tard que si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est nécessairement un intervalle.

1.7 Dérivée d'une fonction

À partir de maintenant $f: I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition du nombre dérivé en un point a

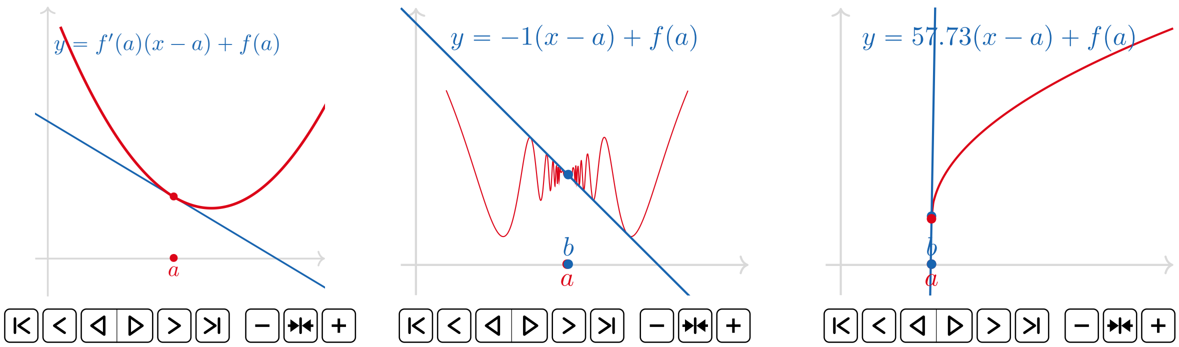
On dit que f est **dérivable** en $a \in I$ si $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en a et est noté $f'(a)$: $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Remarque 7. La fonction f est dérivable en a ssi $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Dans ce cas, $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exemple 9. Montrer que la fonction carrée est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$.

Définition de la tangente en un point a sur lequel f est dérivable

Si f est dérivable en $a \in I$, alors la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est appelée **tangente** de f en a.



(a) Fonction dérivable en a.

(b) Fonction non dérivable en a, le taux d'accroissement entre b et a n'a pas de limite quand b tend vers a.

(c) Fonction non dérivable en a, le taux d'accroissement entre b et a tend vers $+\infty$ quand b tend vers a.

Remarque 8. Le signe de $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ détermine la position de la courbe par rapport à sa tangente en a.

Définition d'une fonction dérivable et fonction dérivée

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable** sur I si f est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée** l'application $f'\colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{cases}$.

Remarque 9. Cette fonction dérivée f se note aussi en physique $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Quand la variable est t, on a aussi la notation $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ ou même $\dot{\theta}$ pour des fonctions angulaires.

Proposition n° 4 : somme/produit/quotient de fonctions dérivables *(admis provisoirement)*

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

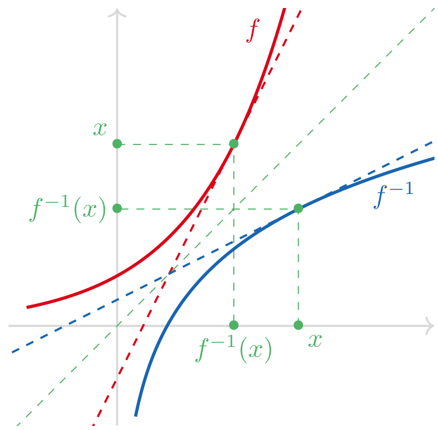
- Combinaison linéaire : la fonction $\lambda f + g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
- Produit : la fonction fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$
- Quotient : Si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Proposition n° 5 : composée de fonctions dérivables *(admis provisoirement)*

Soient $f\colon I \to J$ dérivable sur I et $g\colon J \to \mathbb{R}$ dérivable sur J. Alors, $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$

Exemples 10. Dériver $x \mapsto \cos(x^2)$, $x \mapsto \exp(u(x))$, $x \mapsto \ln(u(x))$, $x \mapsto \sin(u(x))$, $x \mapsto (u(x))^n$, où u est une fonction dérivable sur I (strictement positive dans le cas du ln) et $n \in \mathbb{N}$.

Théorème n° 2 de la dérivée de la bijection réciproque *(admis provisoirement)*
Soient $f\colon I \to J$ une bijection et $x \in J$. Si f est dérivable en $f^{-1}(x)$ et que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, alors, $f^{-1}\colon J \to I$ est dérivable en x et :
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$



Remarque 10. Les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques à la droite d'équation $y = x$. Si $f'(f^{-1}(x)) = 0$ alors f admet une tangente horizontale en $f^{-1}(x)$ et donc f^{-1} admet une tangente verticale en x.

Théorème n° 3 : dérivées et fonctions constantes, (strictement) monotones *(admis provisoirement)*
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :
- f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ et si f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement croissante.

2 Fonctions usuelles

2.1 Logarithme

Définition du logarithme népérien

L'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 est appelée fonction **logarithme népérien** et est notée ln.

Proposition n° 6 : propriétés du logarithme
Pour tous $a > 0$ et $b > 0$:

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(a) = \displaystyle\int_1^a \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$
3. ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
4. $\ln'\colon x \mapsto x^{-1}$
5. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
6. $\ln(1/a) = -\ln(a)$
7. $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$
8. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$
9. $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
10. $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$
11. $\ln\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective
12. $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$

Remarque 11. Le logarithme en base 10 (resp. 2) est défini par, si $x > 0$, $\log_{10}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ (resp. $\log_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$). Ces fonctions ont des propriétés similaires au logarithme népérien, mais $\log_{10}(10) = 1$ et $\log_2(2) = 1$.

2.2 Exponentielle

Définition de la fonction exponentielle

La bijection réciproque de $\ln\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est appelée **exponentielle** et notée exp.

Proposition n° 7 : propriétés de la fonction exponentielle

Pour tout $(a, a', b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$:

1. $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est bijective
2. $b = \exp(a) \iff a = \ln(b)$
3. $\exp(0) = 1$
4. $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
5. $\exp' = \exp$
6. $\exp(a + a') = \exp(a)\exp(a')$
7. $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
8. $\exp(a - a') = \dfrac{\exp(a)}{\exp(a')}$
9. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\exp(a)^n = \exp(an)$
10. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) \geqslant 1 + x$
11. $\exp(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
12. $\exp(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

Remarques 12.
- La fonction exp est la seule fonction égale à sa dérivée et prenant la valeur 1 en 0.
- Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, on peut définir la fonction exponentielle en base a par $x \mapsto \exp(x\ln(a))$. On obtient une fonction qui vaut a en 1, qui transforme les sommes en produit et dont la dérivée est $x \mapsto \ln(a)\exp(x\ln(a))$.

2.3 Fonctions puissances

Définition de la puissance

On définit x^α dans plusieurs cas :

- Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n = \overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{n \text{ fois}}$, par convention, $x^0 = 1$.
- Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}_-$, on pose pour $x \in \mathbb{R}^*$, $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose pour $x > 0$, $x^\alpha = \exp(\alpha\ln(x))$.

Dans tous les cas, ceci définit une fonction $p_\alpha\colon x \mapsto x^\alpha$ définie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^*$ ou sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque 13.
- Si le calcul de x^α rentre dans plusieurs cas, on obtient le même résultat.
- En notant $\mathrm{e} = \exp(1)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \exp(x\ln(\mathrm{e})) = \mathrm{e}^x$.
- De même, pour $a > 0$ et $x > 0$, $\exp(x\ln(a)) = a^x$

Attention à ne pas confondre exponentielle et puissance

Ne pas confondre $x \mapsto a^x = \exp(x\ln(a))$ (exponentielle en base a) avec $p_\alpha\colon x \mapsto x^a = \exp(a\ln(x))$ (puissance) !

Proposition n° 8 : propriétés de la fonction puissance

Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

1. $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$, $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ et $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ (aussi vrai si $(x, y, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^2$ ou si $(x, y, \alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^*)^2 \times \mathbb{Z}^2$)
2. $p_\alpha\colon x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}$, sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R}$, de dérivée $p'_\alpha\colon x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
3. Si $\alpha > 0$, p_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $x^\alpha \xrightarrow[x\to0]{} 0$.
4. Si $\alpha < 0$, p_α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $x^\alpha \xrightarrow[x\to0]{} +\infty$.

Remarque 14. Si $\alpha > 0$, on pose $p_\alpha(0) = 0$, ainsi la fonction p_α est maintenant définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ (et non $\mathbb{R}_+^*$).

Exemple la fonction racine n-ième

- Si $n \in \mathbb{N}^*$ est pair, $x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ et sa bijection réciproque est notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$
- Si $n \in \mathbb{N}$ est impair, $x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

	$\alpha = 0$	$\alpha \in \mathbb{N}^*$	$\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$	$\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$
$p_\alpha(x) =$	$x^0 = 1$	$x^\alpha = \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{\alpha \text{ fois}}$	$x^\alpha = \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$	$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ ($p_\alpha(0) = 0$ si $\alpha > 0$)
Définie pour $x \in$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}_+$ si $\alpha > 0$)
Continue sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}_+$ si $\alpha > 0$)
Dérivable sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}_+$ si $\alpha > 1$)
Fonction dérivée	$x \mapsto 0$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$ ($p_\alpha'(0) = 0$ si $\alpha > 1$)
Limite en 0^+	1	0	$+\infty$	0 si $\alpha > 0$, $+\infty$ si $\alpha < 0$
Limite en $+\infty$	1	$+\infty$	0	$+\infty$ si $\alpha > 0$, 0 si $\alpha < 0$

Table 1 – Résumé des propriétés des fonctions puissances.

Remarque 15. Pour $x > 0$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Proposition n° 9 : croissances comparées

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

1. $\dfrac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
2. $\dfrac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
3. $\dfrac{x}{\exp(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
4. $\dfrac{x^\beta}{\exp(\alpha x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
5. $x \exp(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$
6. $|x|^\beta \mathrm{e}^{\alpha x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$
7. $x \ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$
8. $x^\alpha |\ln(x)|^\beta \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

2.4 La valeur absolue

Définition de la valeur absolue

La fonction $x \mapsto |x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$, définie sur $\mathbb{R}$, est appelée **valeur absolue**.

Proposition n° 10 : propriétés de la valeur absolue

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $|-x| = |x|$ (la valeur absolue est paire)
2. $|xy| = |x| \times |y|$
3. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)
4. $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$ (2^{nd} inégalité triangulaire)
5. $|x| \leqslant r \iff -r \leqslant x \leqslant r$
6. $|x| < r \iff -r < x < r$,
7. $|x| = r \iff x = \pm r$
8. $|x| \geqslant r \iff x \geqslant r$ ou $x \leqslant -r$

Remarque 16. La fonction $x \mapsto \ln(|x|)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$.

2.5 Fonctions trigonométriques

Définition des fonctions cosinus et sinus

Soit $x \in \mathbb{R}$, on note M le point du cercle trigonométrique tel que un angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$ soit x. On note $\cos(x)$ l'abscisse de M et $\sin(x)$ son ordonnée. On a donc défini deux fonctions $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1\,;1]$ et $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1\,;1]$.

Remarques 17.

- Si $x = y + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors ils définissent le même point M sur le cercle trigonométrique. On note alors $x \equiv y\ [2\pi]$.
- Il faut savoir retrouver les cosinus et sinus de $x \pm \pi$ et $\pi/2 \pm x$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
- Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: $\cos(a) = \cos(b) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid b = a + 2k\pi$ ou $b = -a + 2k\pi$ et $\sin(a) = \sin(b) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid b = a + 2k\pi$ ou $b = \pi - a + 2k\pi$

Proposition n° 11 : propriétés des fonctions cosinus et sinus

1. $\sin$ est impaire, 2π-périodique
2. $\cos$ est paire, 2π-périodique,
3. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
4. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
5. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
6. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
7. $\sin$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\sin' = \cos$.
8. $\cos$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\cos' = -\sin$.
9. $\sin^2(a) + \cos(a)^2 = 1$
10. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$
11. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
12. $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
13. $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.
14. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Remarque 18. Grâce à ces formules, on peut trouver une formule de $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\cos(b)$ etc.

Définition de la fonction tangente

Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\cos(x) \neq 0$, on pose $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Ceci définit la fonction **tangente**.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

TABLE 2 – Tableau des valeurs usuelles des fonctions trigonométriques à connaître.

Proposition n° 12 : propriétés de la fonction tangente

1. La fonction $\tan$ est impaire, π-périodique, dérivable sur $D_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et pour tout $x \in D_{\tan}$: $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
2. Si $(a, b, a+b) \in D_{\tan}^3$, alors $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, si $(a, b, a-b) \in D_{\tan}^3$, alors $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

2.6 Fonctions trigonométrique réciproques

Remarque 19. Les fonctions $\cos$ et $\sin$ ne sont pas des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ni $\tan$ de $D_{\tan}$ vers $\mathbb{R}$.

Proposition n° 13 : bijectivité des fonctions trigonométriques sur des «bons» intervalles

$c\colon \begin{cases} [\,0\,;\pi\,] \longrightarrow [\,-1\,;1\,] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$, $s\colon \begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [\,-1\,;1\,] \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases}$ et $t\colon \begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) \end{cases}$ sont bijectives.

Définition des fonctions trigonométriques réciproques

- La bijection réciproque de $c\colon [\,0\,;\pi\,] \to [\,-1\,;1\,]$ est appelée **arccos**: $[\,-1\,;1\,] \to [\,0\,;\pi\,]$.
- La bijection réciproque de $s\colon \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] \to [\,-1\,;1\,]$ est appelée **arcsin**: $[\,-1\,;1\,] \to \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
- La bijection réciproque de $t\colon \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est appelée **arctan**: $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$

Remarques 20. • D'autres intervalles auraient pu être considérés, si $k \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto \cos(x)$ réalise aussi une bijection de $[\,k\pi\,;k\pi+\pi\,]$ vers $[\,-1\,;1\,]$. Par convention, on a privilégié $[\,0\,;\pi\,]$ (un intervalle dans $\mathbb{R}_+$ contenant 0) à $[\,k\pi\,;k\pi+\pi\,]$. Pour s et t, on a privilégié des intervalles centrées en 0 car sin et tan sont impaires.

- Pour tout $x \in [\,-1\,;1\,]$, $\cos(\arccos(x)) = x$ et pour tout $x \in [\,0\,;\pi\,]$, $\arccos(\cos(x)) = x$.
- Pour tout $x \in [\,-1\,;1\,]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$ et pour tout $x \in [\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$ et pour tout $x \in \,]\,-\pi/2\,;\pi/2\,[$, $\arctan(\tan(x)) = x$.

Exemples 11. Calculer $\arctan(1)$, $\arcsin(0)$, $\arcsin(1)$, $\cos(\arccos(0))$, $\arccos(\cos(0))$ et $\arccos(\cos(2\pi))$.

Proposition n° 14 : propriétés des fonctions trigonométriques réciproques

1. arccos est continue sur $[\,-1\,;1\,]$, dérivable sur $]\,-1\,;1\,[$ et pour tout $x \in \,]\,-1\,;1\,[$, $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. arcsin est impaire, continue sur $[\,-1\,;1\,]$, dérivable sur $]\,-1\,;1\,[$, pour tout $x \in \,]\,-1\,;1\,[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. arctan est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

	arccos	arcsin	arctan
Définie sur	$[\,-1\,;1\,]$	$[\,-1\,;1\,]$	$\mathbb{R}$
Image	$[\,0\,;\pi\,]$	$\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$	$\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$
Valeur en 0	$\frac{\pi}{2}$	0	0
Valeur en 1	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
Monotonie	strict. décroissante	strict. croissante	strict. croissante
Parité		impaire	impaire
Continue sur	$[\,-1\,;1\,]$	$[\,-1\,;1\,]$	$\mathbb{R}$
Dérivable sur	$]\,-1\,;1\,[$	$]\,-1\,;1\,[$	$\mathbb{R}$
Fonction dérivée	$x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

TABLE 3 – Résumé des propriétés des fonctions trigonométriques réciproques

2.7 Fonctions hyperboliques

Remarque 21. Pour $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on rappelle qu'il existe une unique fonction paire $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f = p + i$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

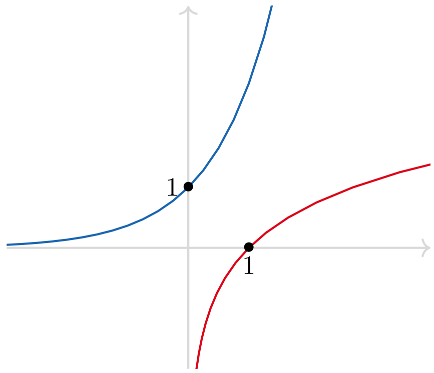
Définition des fonctions cosinus et sinus hyperboliques

On définit le **cosinus hyperbolique** par ch : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} \end{cases}$ et le **sinus hyperbolique** par sh : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} \end{cases}$

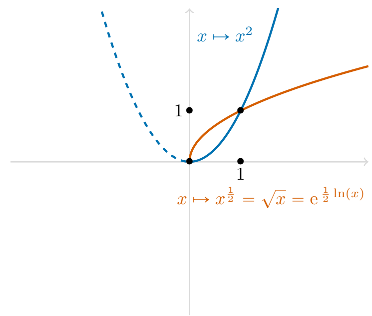
Proposition n° 15 : propriétés des fonctions hyperboliques

1. sh est impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$
2. ch est paire et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$
3. $\mathrm{sh}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $\mathrm{sh}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$
4. $\mathrm{ch}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $\mathrm{ch}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$
5. sh est croissante sur $\mathbb{R}$
6. ch est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$
7. $\forall x \geqslant 0$, $\mathrm{sh}(x) \geqslant 0$, $\forall x \leqslant 0$, $\mathrm{sh}(x) \leqslant 0$.
8. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1$
9. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$

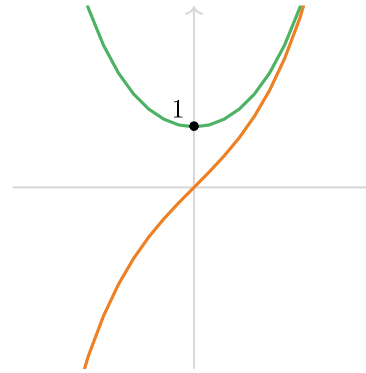
3 Représentation graphique des fonctions usuelles



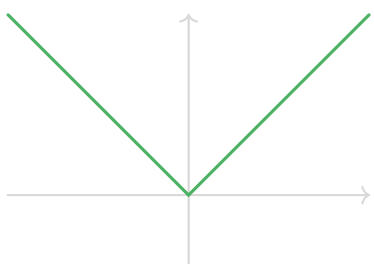
(a) Les fonctions exponentielle et logarithme



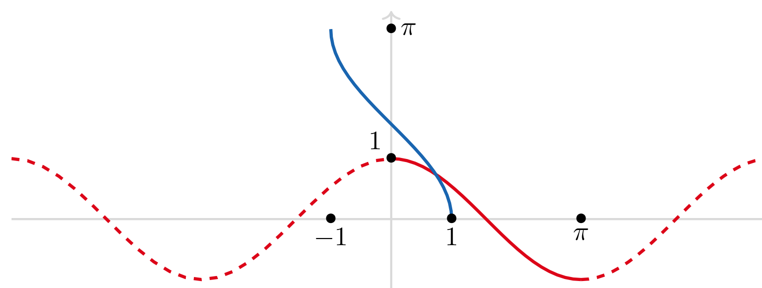
(b) Les fonctions puissances



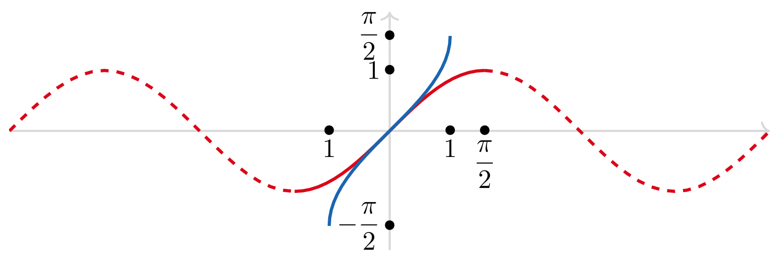
(c) Les fonctions ch et sh



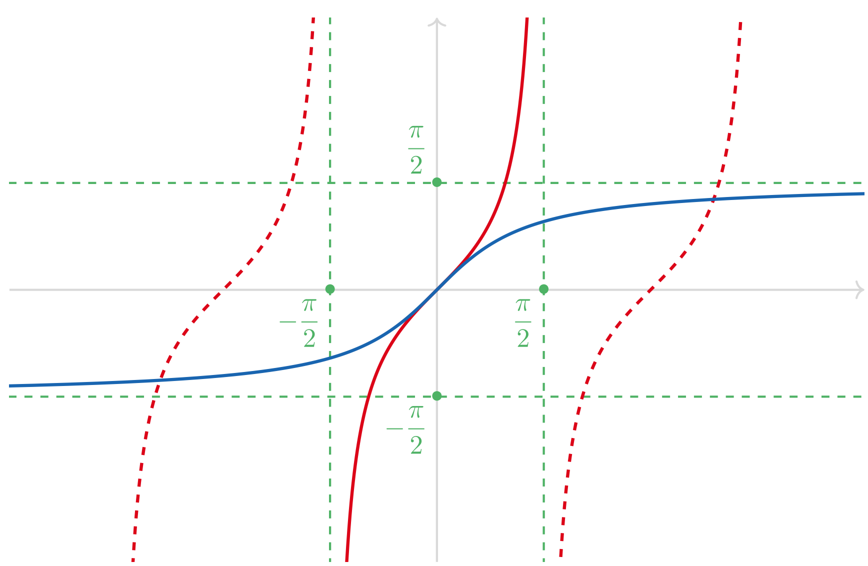
(d) La fonction valeur absolue



(e) La fonction cosinus et la fonction arccos



(f) La fonction sinus et la fonction arcsinus



(g) La fonction tan et la fonction arctan

Figure 2 – Si une fonction est bijective seulement sur une sous-partie de son domaine de définition on l'a tracé en trait plein sur cette sous partie et en pointillé en dehors.