Chapitre 3

Nombres complexes

Ce chapitre a pour but de présenter les nombres complexes et d'effectuer des calculs avec ces nombres. Nous verrons aussi comment résoudre certaines équations avec des nombres complexes.

Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté

Ce polycopié contient une animation, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

1 Définition des nombres complexes et propriétés

Définition des nombres complexes

Si i vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a + \mathrm{i}b$ est appelé **nombre complexe**. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Remarques 1.
- Les nombres réels sont des nombres complexes. En effet, si $x \in \mathbb{R}$, alors $x = x + 0\mathrm{i} \in \mathbb{C}$.
- Cette définition part du principe qu'un tel nombre i existe ce qui est surprenant et ne donne pas d'explication sur ce qu'est le produit $\mathrm{i}b$ ni l'addition entre a et $\mathrm{i}b$. En fait, cette définition est bien rigoureuse car on peut construire un tel nombre i et définir $a + \mathrm{i}b$. Cette construction, hors programme, se trouve en fin de chapitre.
- Une telle construction permettrait aussi de montrer qu'une telle écriture est unique : si $z = a + \mathrm{i}b = a' + \mathrm{i}b'$ avec $(a, a', b, b') \in \mathbb{R}^4$, alors $a = a'$ et $b = b'$, on admet donc aussi l'unicité d'une telle écriture.
- Soit $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b des réels. Si $b = 0$, alors $z = a \in \mathbb{R}$. Si $a = 0$, alors $z = \mathrm{i}b$, on dit dans ce cas que z est un imaginaire pur.

Définition de la partie réelle, de la partie imaginaire et de l'écriture algébrique

Si $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels, on dit que a est la **partie réelle** de z et que b est la **partie imaginaire** de z. On note $\mathrm{Re}(z) = a$ et $\mathrm{Im}(z) = b$. L'égalité $z = a + \mathrm{i}b$ s'appelle l'**écriture algébrique** de z.

Définition des opérations sur les nombres complexes

Soient $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ deux nombres complexes (avec a, a', b et b' des nombres réels). Alors on pose

$$z + z' = (a + \mathrm{i}b) + (a' + \mathrm{i}b') = a + a' + \mathrm{i}(b + b') \quad \text{et} \quad z \times z' = (a + \mathrm{i}b) \times (a' + \mathrm{i}b') = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + a'b)$$

Proposition n° 1 : propriétés algébriques des complexes

Soit $(z, z', \tilde{z}, \lambda) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}$

1. $z + 0 = z$ — 0 : neutre de l'addition
2. $z \times 1 = z$ — 1 : neutre de multiplication
3. $z + z' = z' + z$ — commutativité de l'addition
4. $zz' = z'z$ — commutativité de la multiplication
5. $(z + z') + \tilde{z} = z + (z' + \tilde{z})$ — associativité de l'a.
6. $(z \times z') \times \tilde{z} = z \times (z' \times \tilde{z})$ — associativité de la m.
7. $\exists! w \in \mathbb{C} \mid z + w = 0$ — opposé
8. $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \exists! w \in \mathbb{C} \quad zw = 1$, noté $w = \dfrac{1}{z}$ — inverse
9. $z \times (z' + \tilde{z}) = zz' + z\tilde{z}$ — distributivité de la m.
10. $zz' = 0 \iff z = 0$ ou $z' = 0$ — intégrité de $\mathbb{C}$
11. $\mathrm{Re}(\lambda z + z') = \lambda \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ — linéarité partie réelle
12. $\mathrm{Im}(\lambda z + z') = \lambda \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$ — lin. par. imaginaire

Exemples 1. Écrire les nombres suivants sous forme algébrique : $(1 + 2\mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i})$, $\dfrac{1}{1 + 2\mathrm{i}}$.

Attention : la partie réelle/imaginaire du produit n'est pas ce que vous croyez

En général, $\mathrm{Re}(zz') \neq \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz') \neq \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')$. Considérez $z = z' = \mathrm{i}$.

Péril imminent : on ne compare pas les complexes seulement les réels.

Il n'y a pas de $\leqslant$, $<$, $\geqslant$ ou $>$ définis sur $\mathbb{C}$ (et même s'il y en avait, vous écririez des choses fausses avec).

Définition de point d'affixe

On note $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé d'un plan. Soit $z \in \mathbb{C}$.
- On appelle **point d'affixe** de z le point $M(z)$ de coordonnées (a, b) avec $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.
- On appelle **vecteur d'affixe** de z le vecteur $\overrightarrow{v(z)}$ de coordonnées (a, b).

Définition du conjugué

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On appelle **conjugué** de $z=a+ib$ le complexe $\overline{z}=a-ib$.

Proposition n° 2 : propriétés du conjugué

Soient $(z,z')\in\mathbb{C}^2$ et $x\in\mathbb{R}$.

1. $\overline{\overline{z}}=z$
2. z est réel ssi $\overline{z}=z$
3. z est un imaginaire pur ssi $\overline{z}=-z$
4. $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
5. $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$
6. $\overline{xz}=x\overline{z}$
7. $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$
8. $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$
9. $z\neq 0 \implies \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$
10. $z\neq 0 \implies \overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)}=\dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

Définition du module

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On appelle **module** de $z=a+ib$ le réel $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Remarque 2. Le module de z est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.

Proposition n° 3 : propriétés du module

Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$.

1. $|z|\geqslant 0$
2. $|z|=0$ ssi $z=0$
3. $|z|^2=z\times\overline{z}$
4. $|zz'|=|z|\times|z'|$
5. $|z|=|\overline{z}|$
6. $z\neq 0 \implies \left|\dfrac{z'}{z}\right|=\dfrac{|z'|}{|z|}$
7. $|\mathrm{Re}(z)|\leqslant|z|$
8. $|\mathrm{Im}(z)|\leqslant|z|$
9. $|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$ (inégalité triangulaire)
10. $||z|-|z'||\leqslant|z-z'|$ (2nd inégalité triangulaire)
11. $|z+z'|=|z|+|z'| \iff \exists\lambda\geqslant 0 \mid z=\lambda z'$ ou $z'=\lambda z$ (cas d'égalité de l'inégalité triangulaire)

Comment écrire les fractions sous forme algébrique ?

L'égalité $|z|^2=z\times\overline{z}$ permet d'écrire les fractions sous forme algébrique en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemples 2. Écrire sous forme algébrique les complexes $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$ et $\dfrac{2+\mathrm{i}}{-3+\mathrm{i}}$.

2 Nombres complexes de module 1

Définition du cercle unité

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|=1$. C'est le **cercle unité/trigonométrique**.

Définition de l'exponentielle complexe

Soit $\theta\in\mathbb{R}$, on définit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}=\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)$.

Proposition n° 4 : propriétés de l'exponentielle complexe

Soient $(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2$.

1. $e^{i\theta}\in\mathbb{U}$
2. $\{e^{i\theta}\mid\theta\in\mathbb{R}\}=\mathbb{U}$.
3. $\mathrm{Re}(e^{i\theta})=\cos(\theta)$
4. $\mathrm{Im}(e^{i\theta})=\sin(\theta)$
5. $e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}\times e^{i\theta'}$ (ce qui justifie la notation exponentielle)
6. $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\dfrac{1}{e^{i\theta}}$
7. $e^{i\theta}=e^{i\theta'}\iff\theta\equiv\theta'\ [2\pi]$
8. $\cos(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ $\quad\sin(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ (formules d'Euler)
9. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$ i.e. $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ (formule de Moivre)

Application à la trigonométrie

On peut simplifier beaucoup de calculs de trigonométrie en passant par les complexes grâce aux outils suivants :

- $\cos(x)=\mathrm{Re}(e^{ix})$
- $\sin(x)=\mathrm{Im}(e^{ix})$
- $e^{i(x+x')}=e^{ix}e^{ix'}$
- La formule de Moivre
- Les formules d'Euler
- Linéarité partie réelle/imaginaire
- La factorisation par l'angle moitié : $1\pm e^{ix}$ se factorise par $e^{ix/2}$, $e^{ix}\pm e^{iy}$ se factorise par $e^{i\frac{x+y}{2}}$.

Exemples 3.

- Linéariser $\sin(x)^3$ (linéariser veut dire écrire $\sin(x)^3$ comme somme de $A\cos(px)$ et $B\sin(qx)$).
- Calculer $\cos(p)+\cos(q)$, on pourrait de même calculer $\cos(p)-\cos(q)$, $\sin(p)\pm\sin(q)$.
- Calculer $\cos(p)\cos(q)$ etc.

3 Forme trigonométrique

Proposition n° 5 : existence de la forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit $z\in\mathbb{C}^*$. Alors il existe $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $z=re^{i\theta}$. De plus, $r=|z|$ et θ est unique modulo 2π.

Exemple 4. Écrire 1, i, -3, $-i$, $5-5\sqrt{3}i$ sous forme $re^{i\theta}$ avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

Définition de la forme trigonométrique et de l'argument

L'écriture $z=re^{i\theta}$ avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$ s'appelle la **forme trigonométrique** de z. De plus, $r=|z|$ est le module et on dit que θ est **un** argument de z. On note $\arg(z)\equiv\theta\ [2\pi]$.

Exemple 5. Calculer un argument de $1+i$.

Attention à ne pas confondre le et un

Il n'y a pas unicité de θ car c'est un angle on dit donc «un argument» et non «l'argument».

Remarque 3. L'argument est unique si on le prend dans $[\,0\,;2\pi\,[$: $\quad\forall z\in\mathbb{C}^*\quad\exists!\theta\in[\,0\,;2\pi\,[\quad z=|z|e^{i\theta}$

Proposition n° 6 : propriétés des arguments

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

1. $z=z'$ ssi $(|z|=|z'|$ et $\arg(z)\equiv\arg(z')\ [2\pi])$
2. $\arg(zz')\equiv\arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$
3. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)\equiv\arg(z)-\arg(z')\ [2\pi]$
4. $\arg(\overline{z})\equiv-\arg(z)\ [2\pi]$
5. $z\in\mathbb{R}_+$ ssi 0 est un argument de z
6. $z\in\mathbb{R}_-$ ssi π est un argument de z

Exemple 6. Calculer $(1+\mathrm{i})^6$.

Remarque 4. Si $f(t) = A\cos(t-\varphi)$ (A l'amplitude et φ la phase), alors $f(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$ avec $a = A\cos(\varphi)$ et $b = A\sin(\varphi)$. Si on part de $a\cos(t) + b\sin(t)$, écrire sous forme trigonométrique $z = a + \mathrm{i}b$ pour retrouver A et φ.

Exemple 7. Si $f : t \mapsto 3\sqrt{3}\cos(t) + 3\sin(t)$, retrouver l'amplitude et la phase.

Définition de l'exponentielle complexe

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on appelle exponentielle complexe de z le complexe : $\exp(z) = \exp(a)\exp(ib)$.

Proposition n° 7 : propriétés de l'exponentielle complexe

Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$

1. $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$
2. $\arg(\exp(z)) \equiv \mathrm{Im}(z)\ [2\pi]$
3. $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$
4. $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$
5. $\dfrac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$
6. $\exp(z-z') = \dfrac{\exp(z)}{\exp(z')}$
7. $\exp(z) = \exp(z')$ ssi $z \equiv z'\ [\mathrm{i}2\pi]$ (ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = z' + 2\mathrm{i}k\pi$)

4 Résolutions d'équations complexes

4.1 Résolution des équations de la forme $z^2 = Z$

Définition d'une racine carrée d'un complexe

Soit $Z \in \mathbb{C}$, on appelle racine carrée de Z tout nombre complexe z tel que $z^2 = Z$.

Proposition n° 8 : racines carrées d'un nombre complexe

Si $Z \in \mathbb{C}^*$, alors Z possède exactement deux racines carrées qui sont opposés.

Attention au symbole $\sqrt{\ }$

Le symbole $\sqrt{\ }$ ne s'utilise que pour des nombres réels positifs.

Comment calculer les racines carrées de nombres complexes ?

1. Si $Z \in \mathbb{R}_+$, alors les racines carrées sont $\sqrt{Z}$ et $-\sqrt{Z}$.
2. Si $Z \in \mathbb{R}_-$, alors les racines carrées sont $\mathrm{i}\sqrt{-Z}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{-Z}$.
3. Si $Z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et θ connu, alors les racines carrées sont $\pm\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$
4. Si $Z = A + \mathrm{i}B$, on pose $w = a + ib \in \mathbb{C}$, alors :

$$w^2 = Z \iff \begin{cases} |w^2| = |Z| \\ a^2 - b^2 + \mathrm{i}2ab = A + \mathrm{i}B \end{cases} \iff \begin{cases} |w|^2 = |Z| \\ a^2 - b^2 = A \\ 2ab = B \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{A^2+B^2} \\ a^2 - b^2 = A \\ 2ab = B \end{cases}$$

Les deux premières équations permettent de trouver la valeur de a^2 et de b^2, on trouve alors deux valeurs pour a et deux valeurs pour b, seulement l'équation $2ab = B$ indique si a et b ont ou non le même signe.

Exemples 8. Donner les racines carrées de 0 $\qquad 9, \qquad -1, \qquad -9, \qquad 2\mathrm{i}, \qquad -3+4\mathrm{i}$

4.2 Résolution des équations de la forme $az^2 + bz + c = 0$

Proposition nº 9 : résolution des équations du second degré

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$ et l'équation $az^2+bz+c=0$. On note $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant et δ une racine carrée de Δ, alors :

- Si $\Delta \neq 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes : $\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b+\delta}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution double : $-\dfrac{b}{2a}$

Exemple 9. Résoudre l'équation $z^2-(1+4\mathrm{i})z+3\mathrm{i}-3=0$.

Remarques 5.
- En notant z_1 et z_2 les deux racines (éventuellement égales), $z_1+z_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.
- En considérant qu'une racine double compte ... deux fois, on peut dire qu'une équation du second degré à coefficients complexes a toujours exactement deux racines complexes comptées avec multiplicité. Finalement le cas réel est plus complexe que le cas complexe, car il y avait trois cas : deux racines, une racine ou pas de racine.

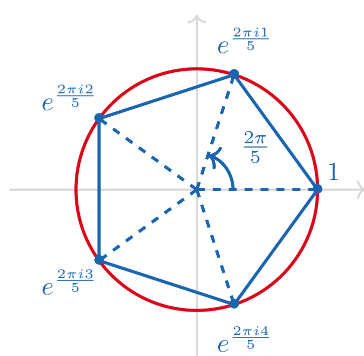
4.3 Résolution des équations de la forme $z^n = 1$

Définition des racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine n-ième de l'unité (ou de 1) tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.
L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$

Théorème nº 1 : expression des racines n-ièmes de l'unité

Si $n \in \mathbb{N}^*$, les racines n-ièmes de 1 sont les n complexes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{n}}$ pour $k \in [\![0 ; n-1]\!]$:$\mathbb{U}_n = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in [\![0 ; n-1]\!]\right\}$



Remarque 6. Les racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier dont l'un des sommets est 1.

4.4 Résolution des équations de la forme $z^n = Z$

Définition des racines n-ièmes d'un complexe

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$, on appelle racine n-ième de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

Proposition n° 10 : expression des racines n-ièmes d'un nombre complexe

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
L'équation $z^n = Z$ admet exactement n solutions qui sont $\sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ pour $k \in [\![0 ; n-1]\!]$.

Exemple 10. Donner les racines quatrièmes de $2\sqrt{3} - 2i$.

Remarque 7. Comme on sait résoudre les équations du type $az^2 + bz + c = 0$ et celles du types $z^n = Z$. On peut se poser la question suivante : est-il possible de résoudre des équations de degré supérieurs comme $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ ou $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$? La réponse est oui mais avec des formules plus compliquées que pour celles de degré 2 (ces formules utiliseront des racines cubiques et quatrièmes de nombres complexes formés à partir de a, b, c, d et e). Par contre, on peut démontrer (mais c'est très difficile) qu'il est impossible de trouver de telles formules pour des équations de degré 5 ou plus.

5 Fonctions à valeurs complexes

Définition d'une fonction dérivable

Si $f : I \to \mathbb{C}$, si $\mathrm{Re}(f) : x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $\mathrm{Im}(f) : x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))$ sont dérivables sur I, alors on dit que f est dérivable sur I et on pose pour tout $x \in I$, $f'(x) = \mathrm{Re}(f)'(x) + i\mathrm{Im}(f)'(x)$.

Exemples 11.
- L'application $f : x \mapsto e^{ix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = ie^{ix}$.
- De manière générale, si $u : I \to \mathbb{C}$ est dérivable, alors $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable de dérivée $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

Remarques 8.
- Les formules pour la somme/le produit/le quotient de fonctions dérivables s'appliquent encore.
- Si $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable alors, pour $x \in I$, $\mathrm{Re}(f'(x)) = \mathrm{Re}(f)'(x)$ et $\mathrm{Im}(f'(x)) = \mathrm{Im}(f)'(x)$.
- Si $f : I \to \mathbb{C}$ est une fonction dérivable, alors f est constante sur l'intervalle I ssi pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

6 Transformations du plan complexe

Proposition n° 11 : traduction complexe du module et de l'argument

Soient a, b deux complexes et $z \neq a, b$. Si A, B, M sont les points d'affixes a, b et z alors : $|a - b| = AB$ et un argument de $\dfrac{z-b}{z-a}$ est $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$.

Remarque 9. Le segment $[AB]$ est l'ensemble des points M d'affixe $z = z_A + \lambda(z_B - z_A)$ avec $\lambda \in [0;1]$.

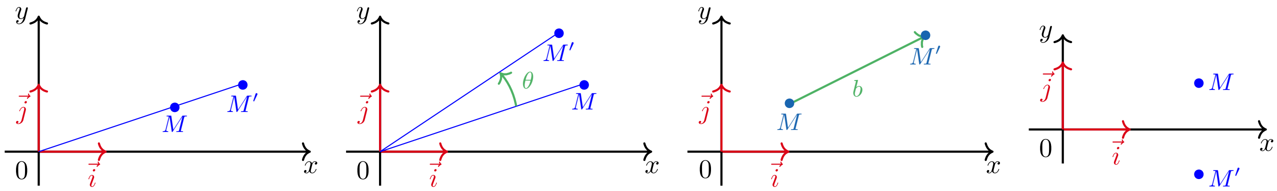
Proposition n° 12 : traduction complexe de l'alignement et de l'orthogonalité

1. Les points A, B et M sont alignés si et seulement si $\dfrac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}$.
2. Le triangle ABM est rectangle en M si et seulement si $\dfrac{z-b}{z-a}$ est un imaginaires pur.

Exemple 12. Soit $A = (1, -1)$, $B = (5, 2)$ et $C = (2, 6)$, le triangle ABC est-il rectangle ?

Proposition n° 13 : transformations du plan et opérations sur les complexes

1. La fonction associant au point M d'affixe z le point M' d'affixe az avec $a \in \mathbb{R}$ est l'**homothétie** de centre O de rapport a.
2. La fonction associant à M d'affixe z le point M' d'affixe $e^{i\theta}z$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ est la **rotation** de centre O d'angle θ.
3. La fonction associant à M d'affixe z le point M' d'affixe $z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$ est la **translation** du vecteur d'affixe b.
4. La fonction associant à M d'affixe z le point M' d'affixe $\overline{z}$ est la **symétrie** par rapport à l'axe des abscisses.



(a) Homothétie (b) Rotation (c) Translation (d) Symétrie axiale

Exemples 13.
- La rotation de centre Ω et d'angle π coïncide avec l'homothétie de centre Ω de rapport -1.
- Déterminer l'expression de la rotation de centre $\Omega = (2, 1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

7 Construction de l'ensemble des nombres complexes (hors programme)

Attention à la lecture de ce paragraphe
Il est possible que vous ne compreniez pas ce qui suit, ou que cette lecture vous donne des troubles métaphysiques.

Notons provisoirement, $\mathbb{R}'$ l'ensemble des nombres réels, $0'$ le nombre nul et $1'$ le nombre un. Et posons $\mathbb{C}$ l'ensemble des couples d'éléments de $\mathbb{R}'$:

$$\mathbb{C} = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}' \text{ et } b \in \mathbb{R}'\}$$

Ainsi, $z \in \mathbb{C}$ veut dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}'$ et $b \in \mathbb{R}'$ tel que $z = (a,b)$. Par unicité d'un couple, un tel a et un tel b sont uniques. On va définir deux opérations sur $\mathbb{C}$. Pour tout $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ et $z' = (a', b') \in \mathbb{C}$, on pose :

$$z + z' = (a,b) + (a',b') = (a+a', b+b') \quad \text{et} \quad z \times z' = (a,b) \times (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

Ainsi, $z + z' \in \mathbb{C}$ et $zz' \in \mathbb{C}$. Posons, $1 = (1', 0)$ et $\mathrm{i} = (0, 1')$, $0 = (0', 0')$ Alors, on vérifie que :

$$\begin{array}{rrcl}
 & z \times 1 = (a,b) \times 1 & = & (a,b) \times (1', 0') = (a \times 1' - b \times 0', a \times 0' + 1' \times b) = (a,b) \\
 & z + 0 = (a,b) + 0 & = & (a,b) + (0', 0') = (a + 0', b + 0') = (a,b) \\
 & (a,b) + (-a,-b) & = & (a + (-a), b + (-b)) = (0', 0') = 0 \quad \text{ainsi} \quad (-a,-b) = -(a,b) \\
\text{si } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0 & (a,b) \times \left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2} \right) & = & (1', 0) = 1 \\
 & \mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \times \mathrm{i} = (0', 1') \times (0', 1') & = & (0' \times 0' - 1' \times 1', 0' \times 1' + 1' \times 0') = (-1', 0) = -(1', 0') = -1
\end{array}$$

Autrement dit, dans $\mathbb{C}$, on a un nombre $0 \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z + 0 = z$, un nombre $1 \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \times 1 = z$ et un nombre $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. Tous les éléments ont un opposé. Les éléments non nuls ont bien un inverse. Les nombres, 1, 0 et i font donc ce qu'on attend d'eux. Notons

$$\mathbb{R} = \left\{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R}' \right\}$$

Notons que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}'$ sont en bijection par l'application $x \mapsto (x, 0)$, mais au moins $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Soit $z = (a', b') \in \mathbb{C}$, on note $a = (a', 0) \in \mathbb{R}$ et $b = (b', 0) \in \mathbb{R}$, on a :

$$z = (a', b') = (a' + 0', 0' + b') = (a', 0') + (0', b') = (a', 0') + (b', 0') \times (0', 1') = a + b \times \mathrm{i} = a + \mathrm{i}b = a \times 1 + b \times \mathrm{i} = a + \mathrm{i}b$$

Finalement, dans $\mathbb{C}$ tout nombre complexe est de la forme $a + \mathrm{i}b$ avec a et b des réels et i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. Enfin, on décide, à partir de maintenant, que les nombres réels sont dans $\mathbb{R}$ et non dans $\mathbb{R}'$. Enfin, on «oublie» cette construction, c'est-à-dire qu'on n'utilise plus que les complexes ont été définies comme des couples de nombres. On considère ainsi les complexes comme des «vrais» nombres, en particulier, i existe bien, il n'a rien d'imaginaire...