

Forme algébrique et trigonométrique

Exercice 1 (★ Cal). Soient $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

- Donner la forme algébrique de z_3 .
- Calculer le module et un argument de z_1 et de z_2 .
- En déduire le module et un argument de z_3 puis la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2 (★ Cal). Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in]-1; 1[$, $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la forme algébrique de :

- $z_1 = (1 - 2i)e^{-i\theta}$
- $z_2 = \frac{e^{i2\theta}}{1 - i}$
- $z_3 = (\sqrt{3} - i)^{2023}$
- $z_4 = \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}$, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
- $z_5 = (1 + e^{i\theta})^n$
- $z_6 = \frac{1}{1 - ae^{i\theta}}$

Exercice 3 (★ Cal, Rai ©). Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, on pose $f(z) = \frac{1 + iz}{1 - iz}$.

- Déterminer les z tels que
 - $f(z) \in \mathbb{R}$
 - $f(z) \in i\mathbb{R}$
 - $|f(z)| = 1$
- Interpréter géométriquement les ensembles ci-dessus.

Exercice 4 (★ Cal). Soient trois nombres complexes : $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_3 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$. On pose $Z = \frac{z_1^3 z_2^4}{z_3^6}$.

- Écrire z_1 , z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
- En déduire une forme trigonométrique de Z .
- Calculer la forme algébrique de Z .

Exercice 5 (★ Rai). Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le complexe $\left(\frac{(\sqrt{3} - i)^7}{(1 - i)^5}\right)^n$ est-il un réel positif?

Exercice 6 (★★ Cal, Rai ©). Trouver les modules et arguments de (préciser les conditions pour $\theta \in \mathbb{R}$)

- $z = e^{i\theta} + e^{i3\theta}$
- $z = (1 + i)^n$
- $z = 1 - e^{i\theta}$
- $z = 1 + i \tan \theta$
- $z = \frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 - \cos \theta - i \sin \theta}$
- $z = e^{e^{i\theta}}$

Exercice 7 (★★ Rai ©). Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\arctan(\alpha)$ est un argument de $1 + i\alpha$.

Exercice 8 (★ Cal ©). Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $|a|^2 + |b|^2 = \frac{1}{2}(|a - b|^2 + |a + b|^2)$.

Exercice 9 (♠★★ Rai, Rec ©). 1. Soit $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, montrer que $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$.

- Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $\exists i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \quad \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad z_j = \lambda_j z_i$
- Interpréter graphiquement cette condition.

Exercice 10 (★ Rai ©). On dit que $n \in \mathbb{N}$ est somme de deux carrés si :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{N}^2 \quad n = a^2 + b^2$$

Soit n_1 et n_2 deux entiers qui sont sommes de deux carrés : $n_1 = a^2 + b^2$ et $n_2 = c^2 + d^2$. Posons $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$. Comment écrire n_1 et n_2 en fonction de z_1 et z_2 ? Démontrer $n_1 n_2$ est somme de deux carrés.

Exercice 11 (★★ Rai, Rec ©). Trouver toutes les fonctions $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $f(z + z') = f(z) + f(z')$ et $f(z z') = f(z)f(z')$.

Exercice 12 (★ Cal ©). Démontrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $|e^{it} - 1| \leq |t|$.

Exercice 13 (★★ Rai, Rec). On pose $G = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

- Montrer que si $(g, h) \in G^2$ alors $g + h \in G$ et $gh \in G$.
- Déterminer les $g \in G$ non nul tel que $g^{-1} \in G$. (on dit que g est inversible dans G).
- Démontrer que tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $g \in G$ tel que $|z - g| < 1$.
- Soit $(\alpha, \beta) \in G^2$ avec $\beta \neq 0$, démontrer qu'il existe $(q, r) \in G^2$ tel que $\alpha = \beta q + r$ avec $|r| < |\beta|$ (division euclidienne dans G).

Trigonométrie

Exercice 14 (★ Cal). Linéariser $\cos^3(\theta)$, $\sin^2(\theta) \cos^2(\theta)$ et $\sin^4(\theta)$, $\cos^4(\theta)$.

Exercice 15 (★ Cal). Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de puissances de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

Exercice 16 (★ Cal). 1. Écrire $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x)$ sous la forme $A\cos(x - \varphi)$.

2. Résoudre $\sin(x) + \cos(x) = 0$

3. Résoudre l'inéquation $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) < 1$

Équations algébriques

Exercice 17 (♯★ Cal ©). 1. Donner l'expression des trois racines cubiques de 1.

2. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Calculer \bar{j} , $1 \times j \times j^2$, $1 + j + j^2$ et $j(j+1)$.

Exercice 18 (★ Cal). Déterminer les racines carrées de $1 + 6i$, $24i - 7$ et de $-5 + 12i$.

Exercice 19 (★ Cal). Déterminer les racines cubiques de $-\sqrt{3} + i$.

Exercice 20 (★ Cal). Déterminer les racines n -ièmes de -1 .

Exercice 21 (★★ Cal ©). 1. Calculer les racines n -ièmes de $-i$ et de $1 + i$.

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - z + 1 - i = 0$.

3. En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Exercice 22 (★ Cal). Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^2 + z + 1 = 0$

6. $z^6 + (2i - 1)z^3 - 1 - i = 0$

2. $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$

7. ★★ $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$ ©

3. $z^2 - (3 + 2i)z + 3i = 0$

4. $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$

8. $e^z = j$ avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

5. $(1 - i)z^2 - (5 - i)z + 10 = 0$

9. $z^n = \bar{z}$.

Exercice 23 (★ Cal). Résoudre $\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) = -1$.

Exercice 24 (★★ Cal, Rec ©). Dans cet exercice, on note $w = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. Calculer w^5 , $a = w + w^4$ et $b = w^2 + w^3$ sous forme algébrique.

2. Calculer explicitement $a + b$ et ab . De quelle équation les complexes a et b sont-ils solutions?

3. Résoudre cette équation.

4. En déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 25 (★★ Rec, Rai, Cal). Résoudre l'équation $z^3 - (4i + 2)z^2 + (6i - 4)z + 4 = 0$, Commencer à chercher une racine imaginaire pure.

Exercice 26 (★ Cal, Rai ©). Résoudre, dans \mathbb{C} , $\begin{cases} z + z' = 5 + 2i \\ zz' = 5 + 5i \end{cases}$.

Exercice 27 (★★★ Rai, Rec). Posons $\omega = \frac{4 + 3i}{5}$. Montrer que $\omega \in \mathbb{U}$, que $\omega^n = \frac{a_n + ib_n}{5^n}$, avec a_n et b_n deux entiers définis par récurrence. En déduire que ω n'est pas une racine n -ième pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Transformations du plan complexe

Exercice 28 (★ Cal, Rai). Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que :

1. 1, z et z^2 forment un triangle rectangle.

2. z , $\frac{1}{z}$ et i sont alignés.

3. z , z^2 et z^4 sont alignés.

Exercice 29 (★ Cal, Rai ©). Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

1. $|z + i| = |z - i|$

2. $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1 + z|$

3. $z + \bar{z} = z\bar{z}$

Exercice 30 (★ Rai). Soit (a, b, c) trois complexes.

1. Donner une CNS sur a , b et c tel que le triangle abc soit équilatéral utilisant $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2. Existe-t-il des triangles équilatéraux à coordonnées entières?

Exercice 31 (★ Rai). Déterminer l'écriture complexe de chacune des transformations suivantes :

1. La translation de vecteur d'affixe $3 - 2i$.

2. L'homothétie de centre le point d'affixe $2 - 2i$ et de rapport 2.

3. La rotation r d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ et de centre le point d'affixe i .

4. La symétrie de centre $1 + i$.