Chapitre 4

Primitives et équations différentielles

Dans ce chapitre, nous allons revoir la définition et le calculs des primitives et des intégrales d'une fonction continue. Puis nous verrons la résolution d'équations différentielles. Dans ce chapitre, nous ne donnerons pas une définition précise de l'intégrale, nous nous contenterons d'admettre ses propriétés ainsi que le théorème fondamental de l'analyse. Nous reviendrons sur la construction de l'intégrale au second semestre et ce sera l'occasion de démontrer ce fameux théorème fondamental.

Table des matières

Dans ce chapitre, on considère $\mathbb{K}$ qui vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle.

1 Calcul de primitives et d'intégrales

1.1 Rappels des propriétés de l'intégrale et extension aux fonctions à valeurs complexes

Dans ce chapitre, on admet que pour $f\colon [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$, une fonction continue sur $[\,a\,;b\,]$, on peut lui associer un nombre qui représente l'aire algébrique sous la courbe, noté $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, vérifiant les propriétés suivantes :

Proposition n° 1 : propriétés de l'intégrale des fonctions continues sur un segment *(admis)*

Pour tout $(f,g) \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})^2$, $c \in [\,a\,;b\,]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1. $\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$ (linéarité)
2. si $f \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ (positivité)
3. Si $f \leqslant g$ alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$ (croissance)
4. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(u)\,\mathrm{d}u$ (Chasles)

Définition de l'intégrale d'une fonction continue à valeurs complexes

Si $f\colon [\,a\,;b\,] \to \mathbb{C}$ est continue, i.e. $x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))$ sont continues sur $[\,a\,;b\,]$, alors on définit l'intégrale de f par :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,\mathrm{d}x$$

Remarques 1.

- Ainsi, $\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{Im}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,\mathrm{d}x$. De plus, la linéarité et la relation de Chasles restent vraies avec des fonctions à valeurs complexes. En revanche, la positivité et la croissance n'ont plus de sens.
- Si $a > b$, alors on pose $\int_a^b f = -\int_b^a f$ et, par convention, $\int_a^a f = 0$.

1.2 Théorème fondamental de l'analyse et conséquences

Définition d'une primitive

Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On appelle **primitive** de f toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple 1. Si $f(x) = x^3$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors une primitive de f est $x \mapsto$

Théorème n° 1 : fondamental de l'analyse *(admis provisoirement)*

Soient $x_0 \in I$ et $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{C})$. Posons, pour $x \in I$, $G(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. G est une primitive de f qui s'annule en x_0.
2. Les primitives de f sont exactement les fonctions de la forme $G + c$ où $c \in \mathbb{R}$.
3. La fonction G est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0.

Attention il n'y a pas unicité des primitives

On dit donc «une primitive de f» et non «la primitive de f». Les primitives diffèrent toutes d'une constante.

Remarque 2. Pour une fonction f continue, on note $\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour dire une primitive «générique» de f.

Exemple 2. Pour $\lambda \neq 0$, $\int^x \mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x} + c$ où c est une constante. Si $\lambda = 0$, $\int^x \mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = x + c$.

Théorème n° 2 : calcul d'intégrale

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{C})$ et F une primitive de f, alors : $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemples 3. Calculer $\int_3^4 x^3\,\mathrm{d}x$, et $\int_2^3 \frac{1}{t+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t$.

1.3 Primitives usuelles

	Condition(s)	Intervalle(s)
$\int^x \lambda\,\mathrm{d}t = \lambda x + k$	$\lambda \in \mathbb{C}$	$\mathbb{R}$
$\int^x t^\alpha\,\mathrm{d}t = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$	$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-$, $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \notin \mathbb{Z}$
$\int^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\lvert x\rvert + k$		$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$\int^x \mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x} + k$	$\lambda \in \mathbb{C}^*$	$\mathbb{R}$
$\int^x a^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln a}a^x + k$	$a > 0$ et $a \neq 1$	$\mathbb{R}$
$\int^x \cos(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\sin(\omega x + \varphi) + k$	$\omega \in \mathbb{R}^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\int^x \sin(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega x + \varphi) + k$	$\omega \in \mathbb{R}^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\int^x \tan t\,\mathrm{d}t = -\ln(\lvert\cos x\rvert) + k$		$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\int^x 1 + \tan^2(t)\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{1}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = \tan x + k$		$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$
$\int^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan(x) + k$		$\mathbb{R}$
$\int^x \frac{1}{f+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{f}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{f}}\right) + k$	$f > 0$	$\mathbb{R}$
$\int^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin(x) + k$		$]-1\,;1\,[$
$\int^x \mathrm{ch}(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\mathrm{sh}\omega x + k$	$\omega \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$
$\int^x \mathrm{sh}(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\mathrm{ch}\omega x + k$	$\omega \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$

TABLE 1 – Primitives usuelles

	Condition(s)
$\displaystyle\int^x u'(t)\times u(t)^\alpha\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}(x)$	$\alpha \neq -1$, $u\colon I\to\mathbb{C}^*$ si $\alpha\in\mathbb{Z}_-$, $u\colon I\to\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha\notin\mathbb{Z}$
$\displaystyle\int^x \frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{u(x)}$	$u\colon I\to\mathbb{C}^*$
$\displaystyle\int^x \frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{u(x)}$	$u\colon I\to\mathbb{R}_+^*$
$\displaystyle\int^x u'\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^{u(x)}$	aucune
$\displaystyle\int^x \frac{u'}{u} = \ln(\lvert u(x)\rvert)$	$u\colon I\to\mathbb{R}^*$
$\displaystyle\int^x u'(t)\sin(u(t))\,\mathrm{d}t = -\cos(u(x))$	aucune
$\displaystyle\int^x u'\cos u = \sin(u(x))$	aucune

TABLE 2 – Primitives usuelles grâce à la dérivation d'une composée avec u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Exemples 4. Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^{2t}\cos(3t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int^x \cos^3(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

Péril imminent : n'inventez pas fausses formules de primitives

Si on a des primitives de u et de v, en général, on ne peut en déduire des primitives de uv, u/v, $u\circ v$, ou de u^α.

1.4 Calculs des primitives de $x\mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$

Comment calculer des primitives de $x\mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $a\neq 0$?

Déterminer le nombre de racines réelles de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$:

1. S'il y a deux racines réelles distinctes x_1 et x_2, alors il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{x_1,x_2\} \qquad \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$$
2. S'il y a une racine double x_0, alors $x\mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c} = \dfrac{1}{a(x-x_0)^2}$
3. S'il y a zéro racine réelle, utiliser la forme canonique et $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+e)^2+f} = \frac{1}{\sqrt{f}}\arctan\left(\frac{x+e}{\sqrt{f}}\right)$ si $f>0$

Exemples 5.
- En précisant les intervalles, déterminer des primitives de $x\mapsto \dfrac{1}{x^2+4x-12}$, $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+4x+4}$, $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+4x+10}$ puis de $x\mapsto\dfrac{4x+3}{x^2+4x-12}$
- Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1.5 Calculs d'intégrales par intégrations par parties

Théorème n° 3 : intégration par parties

Soit $(u,v)\in\mathscr{C}^1([\,a\,;b\,],\mathbb{K})^2$, alors :
$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemples 6.
- Calculer $\int_1^2 x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$ et $\int_1^2 x^2\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.
- Calculer une primitive de ln et de arctan.

Remarque 3. Les IPP sont souvent utiles lorsque la dérivée d'une fonction est plus «simple» que la fonction elle-même.

1.6 Changement de variable

Théorème n° 4 : de changement de variable

Soient $\varphi \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{C}^0(\varphi([\,a\,;b\,]),\mathbb{K})$, alors
$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Comment effectuer un changement de variable ?

Dans une intégrale à calculer dont la variable est t. Poser une nouvelle variable x en fonction de t. Il faut ne pas oublier chacune de ces trois étapes :
- Dans l'intégrande, remplacer les t par leur valeur qui dépend de x. Attention, soit la variable est t et dans ce cas-là, il n'y a pas de x, soit la variable est x et dans ce cas-là il n'y a pas de t.
- Changer les bornes : si t vaut une des bornes, calculer la nouvelle borne correspondante en x (le faire pour les deux bornes).
- Enfin, si $x = \varphi(t)$, par dérivation, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, vous permet de remplacer $\mathrm{d}t$ par sa valeur en $\mathrm{d}x$.

Exemples 7. À l'aide de changement de variables du type $x = \ln(t)/\mathrm{e}^t/t^2/\sqrt{t}/\cos(t)/\sin(t)$,
1. calculer $\int_1^2 \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$
2. calculer $\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
3. calculer $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$
4. calculer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}+1}$ et de $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2+9}$

2 Équation différentielle linéaire du premier ordre

2.1 Définition

On se fixe I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

Soit $(a,b) \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})^2$. On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** l'équation d'inconnue la fonction y :
$$y' + a(x)y = b(x) \quad (E)$$
Si f est une fonction dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, $f'(x)+a(x)f(x) = b(x)$, on dit que f est une **solution** de l'équation différentielle (E). On note souvent S_E l'ensemble des solutions de (E).

Exemples 8.
- L'équation $y' - \frac{1}{x\ln(x)}y = \ln(x)\mathrm{e}^x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre sur $]\,0\,;1\,[$.
- Vérifier que $x \mapsto \ln(x)\mathrm{e}^x$ est une solution de cette équation.
- $xy' + 2y = \mathrm{e}^x$ n'est pas *vraiment* une équation différentielle linéaire du premier ordre à cause du terme xy' (on dit que c'est une équation différentielle non normalisée). Pour la résoudre, on divise par x sur un intervalle où x ne s'annule pas. Il faudra donc travailler sur $\mathbb{R}_+^*$, puis faire le même travail sur $\mathbb{R}_-^*$. En effet, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Remarque 4. La notation en usage mélange fonctions et nombre dans l'équation différentielle, ce qui est bien malheureux. Il faut bien avoir en tête que cet abus n'est toléré que pour écrire l'équation que l'on est en train de traiter. Si vous voulez vérifier qu'une fonction f est solution d'une équation, il faudra écrire, «pour tout $x \in I$, $f'(x) + a(x)f(x) = \ldots = b(x)$»

Définition de l'équation homogène

Soit une EDL du premier ordre $y' + a(x)y = b(x)$. L'**équation homogène** associée est $y' + ay(x) = 0$.

2.2 Résolution des équations différentielles linéaire du premier ordre

Proposition n° 2 : résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre homogène
Soit $y' + a(x)y = 0$ avec $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$ et A une primitive de a sur I. Les solutions de cette EDL homogène sont exactement les fonctions de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)}$ où $C \in \mathbb{K}$ $\qquad S_H = \{x \mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)} \text{ avec } C \in \mathbb{K}\}$.

Exemples 9.
- Résoudre sur $\mathbb{R}$, $y' + xy = 0$ puis $y' - \dfrac{y}{1+x^2} = 0$.
- Si a est une constante, les solutions de $y' + ay = 0$ sont de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{-ax}$ avec $C \in \mathbb{K}$.

Proposition n° 3 : ensemble des solutions à partir d'une solution particulière
Considérons l'EDL : $y' + a(x)y = b(x)$ (E). Supposons que l'on ait une solution particulière notée y_P. Alors les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme $y_P + y_H$ où $y_H \in S_H$: $\qquad S_E = \{y_P + y_H \mid y_H \in S_H\}$.

Proposition n° 4 : variation de la constante
Considérons l'EDL : $y' + a(x)y = b(x)$. Il existe une solution particulière $y_P\colon x \mapsto C(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ où C est une fonction dérivable sur I.

Exemple 10. Résoudre $y' + \dfrac{1}{x}y = x^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition n° 5 : principe de superposition
Soient deux EDL : $y' + a(x)y = b_1(x)$ (E_1) et $y' + a(x)y = b_2(x)$ (E_2). Si y_1 (resp. y_2) est une solution de (E_1) (resp. de (E_2)) et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est une solution particulière de $y' + a(x)y = \lambda b_1(x) + \mu b_2(x)$.

Théorème n° 5 : existence et unicité de la solution au problème de Cauchy
Soit $(a, b, x_0, y_0) \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})^2 \times I \times \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy : $y' + a(x)y = b(x)$ et $y(x_0) = y_0$ admet une unique solution sur I.

Exemple 11. Résoudre $y' + \dfrac{1}{x}y = x^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$. avec la condition $y(1) = 5$.

3 Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Définition d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$. L'équation $y'' + ay' + by = f(x)$ (E) est appelée **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants**. Une **solution** de (E) est une fonction $g\colon I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable telle que, pour tout $x \in I$, $g''(x) + ag'(x) + bg(x) = f(x)$. L'**équation homogène associée** à cette EDL est $y'' + ay' + by = 0$ (H).

Exemple 12. L'équation différentielle $y'' + 2y' + 4y = \mathrm{e}^x$ est linéaire du second ordre à coefficients constants.

Définition de l'équation caractéristique associée

Soit $y'' + ay' + by = 0$ (H) une EDL homogène du second ordre à coefficients constants. On appelle **équation caractéristique** associée à (H) $r^2 + ar + b = 0$

Théorème n° 6 : résolution dans $\mathbb{K}$ d'une EDL du 2nd ordre homogène à coefficients constants

Soit $y'' + ay' + by = 0$ (H) avec $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique (EC).

1. Si l'EC admet deux racines distinctes dans $\mathbb{K}$ r_1 et r_2 (i.e. $\Delta \neq 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\Delta > 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et

$$S_H = \left\{x \mapsto C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{K}^2\right\}$$

2. Si l'EC admet une racine double $r_1 \in \mathbb{K}$ (i.e. $\Delta = 0$) et $S_H = \left\{x \mapsto (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{r_1 x} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{K}^2\right\}$
3. Si l'EC n'a pas de racines (i.e. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$), notons les deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ alors $S_H = \left\{x \mapsto (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))\, \mathrm{e}^{\alpha x} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Exemples 13. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 4y = 0$
2. $y'' - 3y' + 9y = 0$
3. $y'' + 5y' + 4y = 0$

Exemple : cas particulier des équations de la forme $y'' + \omega_0{}^2 y = 0$ où $\omega_0 > 0$

Une connaissance parfaite des solutions de cette équation est nécessaire car apparaît souvent en physique/SI.

Proposition n° 6 : ensemble des solutions à partir d'une solution particulière

Soit $y'' + ay' + by = f(x)$ (E) une EDL d'ordre 2 à coefficients constants définie sur I. Si y_P est une solution particulière de (E) alors les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme : $y_H + y_P$ avec y_H solution de l'équation homogène associée (H). Ainsi, $S_E = \{y_H + y_P \mid y_H \in S_H\}$.

Proposition n° 7 : principe de superposition

Si $y_1'' + ay_1' + by_1 = f_1$ et $y_2'' + ay_2' + by_2 = f_2$, alors pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de $y'' + ay' + by = \lambda f_1 + \mu f_2$.

Remarque 5. Vous ne saurez pas résoudre $y'' + ay' + by = f$ avec $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et f quelconque sauf cas particuliers.

Définition de la multiplicité d'une racine

Considérons une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) et $r \in \mathbb{C}$.

- Si r est une racine double, on peut factoriser par $(x - r)^2$, on dit que la multiplicité de r est 2.
- Si r est une racine mais pas double, on peut factoriser que par $(x - r)^1$, on dit que la multiplicité de r est 1.
- Si r n'est pas une racine, on peut factoriser que par $(x - r)^0 = 1$, on dit que la multiplicité de r est 0.

Proposition n° 8 : solution particulière pour certains seconds membres (principe de ressemblance)

Pour les fonctions f présentes dans ce tableau, l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f$ (avec $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et d'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ noté EC), admet une solution particulière de la forme indiquée :

Si $f : x \mapsto \ldots$	m multiplicité de	Il existe une solution particulière $x \mapsto \ldots$
$A\mathrm{e}^{\omega x}$ avec $(A, \omega) \in \mathbb{K}^2$	ω dans l'EC	$x^m B \mathrm{e}^{\omega x}$ avec $B \in \mathbb{K}$
$A \cos \omega x + B \sin \omega x$ avec $(a, b, A, B, \omega) \in \mathbb{R}^5$	$\mathrm{i}\omega$ dans l'EC	$x^m (C \cos \omega x + D \sin \omega x)$ avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$
$\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_k \in \mathbb{K}$	0 dans l'EC	$x^m \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$ avec $b_k \in \mathbb{K}$

Exemples 14. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2} e^x$
2. $y'' - 2y' + y = \cos(2t)$
3. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 4$
4. $y'' + 9y = 8\mathrm{e}^{3x} - \cos(3x)$

Théorème n° 7 : existence et unicité de la solution au problème de Cauchy *(admis)*

Soit $(a, b, y_0, y_1, x_0, f) \in \mathbb{K}^4 \times I \times \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$. Le problème de Cauchy : $y'' + ay' + by = f(x)$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ admet unique solution sur I.