Chapitre 5

Ensembles et applications

Les buts de ce chapitre sont :

- L'étude précise du vocabulaire lié aux ensembles, notamment comment prouver que deux ensembles sont égaux, ainsi que les opérations sur les ensembles notamment l'intersection, l'union et le complémentaire d'ensembles.
- Prolonger la notion d'application à des ensembles quelconques, donc plus vastes, et introduire la notion d'injection, de surjection pour faire le lien avec la notion de bijection.

Dans ce chapitre, les notions vues sont très générales et applicables à n'importe quels types d'ensembles (nombres, vecteurs, fonctions, suites, matrices, ...) ou d'applications pour poser un socle commun qui sera décliné dans de nombreux chapitres ultérieurs.

Table des matières

1 Ensembles **2**
- 1.1 Définitions . . . 2
- 1.2 Opérations sur les ensembles . . . 3
  - 1.2.1 Union et intersection . . . 3
  - 1.2.2 Généralition à une union/intersection finie d'ensembles et recouvrement . . . 3
  - 1.2.3 Différence de deux ensembles et complémentaire . . . 3
  - 1.2.4 Produit cartésien d'ensembles . . . 4
  - 1.2.5 Parties d'un ensemble . . . 4

2 Applications **5**
- 2.1 Définition . . . 5
- 2.2 Restriction et prolongement . . . 5
- 2.3 Image directe et image réciproque d'une fonction . . . 6
- 2.4 Composition de fonctions . . . 7
- 2.5 Applications injectives . . . 7
- 2.6 Applications surjectives . . . 8
- 2.7 Applications bijectives . . . 8

1 Ensembles

1.1 Définitions

Définition d'un ensemble

On appelle **ensemble** toute collection d'objets appelés **éléments** de cet ensemble. Pour dire qu'un élément x **appartient** à un ensemble E, on écrit $x \in E$. Sinon, on écrit $x \notin E$. On appelle **ensemble vide** l'ensemble constitué d'aucun élément, on le note $\varnothing$. On appelle **singleton** tout ensemble constitué d'un seul élément a, noté $\{a\}$.

Exemple 1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des ensembles de nombres. Ainsi, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ mais $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et même $\sqrt{2} \in \mathbb{C}$. , $\mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_n$ sont deux ensembles de nombres complexes, $\mathbb{U}$ est infini, $\mathbb{U}_n$ possède n éléments.

Remarque 1. Pour définir un ensemble, on peut procéder par :
- Extension : lister tous les éléments qu'il contient : $F = \{2, 4, 6\}$
- Compréhension : donner une propriété qui caractérise les éléments parmi ceux d'un ensemble : $F = \{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \text{ pair et } 1 \leqslant k \leqslant 7\}$. D'une façon générale, $\mathscr{P}(x)$ est une proposition qui dépend de $x \in E$, alors $F = \{x \in E \text{ tel que } \mathscr{P}(x)\}$ est un ensemble.

Exemple 2. Donner la définition de $\mathbb{U}_n$ par compréhension puis l'écrire par extension.

Attention à ne pas confondre les éléments dans la définition par compréhension

Si $F = \{k \in [\![0\,;7]\!] \mid \exists p \in \mathbb{N},\ k = 2p\}$, alors si $k \in [\![0\,;7]\!]$ avec $k = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors $k \in F$, mais p pas forcément.

Définition de l'inclusion entre ensembles

Un ensemble F est dit **inclus** dans un ensemble E si tous les éléments de F sont aussi éléments de E. On note alors $F \subset E$. On dit alors que F est un **sous-ensemble/partie** de E.

Remarque 2. Pour prouver que $F \subset E$, on doit donc prouver que pour tout $x \in F$, alors $x \in E$.

Remarque 3. Si E est un ensemble, alors $\varnothing$ et E sont toujours deux parties de E.

Exemple 3. $\{1, 3\} \subset \{1, 3, 4\}$

Exemple 4. Écrire, si possible, des inclusions entre $\mathbb{U}_4$, $\mathbb{U}_6$, $\mathbb{U}_{12}$ et $\mathbb{U}$.

Définition de l'égalité de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles alors on dit que E et F sont égaux si $E \subset F$ et $F \subset E$. On note alors $E = F$.

Exemple 5. $\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{b, a, c, c\}$: l'ordre des éléments et les répétitions n'ont pas d'importance.

Comment montrer que $E = F$?

Très souvent, on montre $E \subset F$ et $F \subset E$.

Proposition n° 1 : transitivité de l'inclusion

Soient E, F et G trois ensembles, si $E \subset F$ et $F \subset G$ alors $E \subset G$.

1.2 Opérations sur les ensembles

1.2.1 Union et intersection

Définition de l'union/de l'intersection de deux ensembles

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On définit l'**intersection** de A et B comme l'ensemble des éléments qui sont dans A et dans B : $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$
On définit l'**union** de A et B comme l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B :
$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
On dit que A et B sont **disjoints** lorsque $A \cap B = \varnothing$. On dit aussi que $A \cup B$ est une union disjointe.

Remarque 4. On a les inclusions : $A \cap B \subset A \subset A \cup B$. Attention, si $x \in A \cap B$, alors $x \in A \cup B$ car le «ou» est inclusif.

Remarque 5. Ne confondez pas distincts et disjoints : $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 3\}$ sont distincts mais pas disjoints.

Proposition n° 2 : propriétés des intersections et des unions

Soit E un ensemble et A, B et C trois sous-parties de E.

1. $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$, $A \cup E = E$, $A \cap E = A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ noté sans ambiguïté $A \cup B \cup C$
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ noté sans ambiguïté $A \cap B \cap C$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité de l'union par rapport à l'intersection)
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de l'intersection par rapport à l'union)

Remarque 6. $A \cup B \cap C$ n'a pas de sens : calculer $(A \cup B) \cap C$ et $A \cup (B \cap C)$ avec $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ et $C = \{1\}$.

1.2.2 Généralition à une union/intersection finie d'ensembles et recouvrement

Définition d'une union/intersection de plusieurs ensembles

Soient A_1, A_2, ... et A_n n parties de E. On appelle, **union** de ces parties l'ensemble des x qui sont dans au moins l'un des A_i et **intersection** de ces parties l'ensemble des x qui sont dans tous les A_i :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in [\![1 ; n]\!] \quad x \in A_i\} \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1 ; n]\!] \quad x \in A_i\}$$

Définition d'un recouvrement, d'une partition

On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment un **recouvrement** de E si $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$.
On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une **partition** de E si tous les A_i sont non vides, si c'est un recouvrement et si les A_i sont deux à deux disjoints, c'est-à-dire que : $\forall (i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2 \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$

Exemple 6. Si A (resp. B) est l'ensemble des nombres pairs (resp. impairs), alors A et B forment une partition de $\mathbb{Z}$.

Remarque 7. On peut aussi faire une union ou une intersection infinie d'ensembles. Par exemple, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est un sous-ensemble de E, alors on note $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k = \{x \in E \mid \exists k \in \mathbb{N} \quad x \in E_k\}$ et $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k = \{x \in E \mid \forall k \in \mathbb{N} \quad x \in E_k\}$

1.2.3 Différence de deux ensembles et complémentaire

Définition de la différence de deux ensembles

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. L'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B est appelé **différence** (ensembliste) de A par B. On note $A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

Remarque 8. Soient A et B deux parties de E. $A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B)$ et $B \cap (A \backslash B) = \varnothing$

Définition du complémentaire d'un sous-ensemble par rapport à un ensemble

Soient E un ensemble et A une partie de E. L'ensemble des éléments qui sont dans E mais pas dans A est appelé **complémentaire** de A dans E. On note $E \backslash A = \{x \in E \mid x \notin A\}$ ou $\bar{A}$ ou A^c.

Proposition n° 3 : propriétés du complémentaire

1. $E \cap A$ et A sont des parties disjointes de E : $\overline{A} \cap A = \varnothing$.
2. $\overline{\overline{A}} = A$ — le complémentaire du complémentaire d'un ensemble vaut cet ensemble
3. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ — le complémentaire de l'union est l'intersection des complémentaires
4. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ — le complémentaire de l'intersection est l'union des complémentaires
5. $A \subset B \iff E \backslash B \subset E \backslash A$ — le passage au complémentaire renverse l'inclusion

1.2.4 Produit cartésien d'ensembles

Définition d'un couple de deux éléments

Soit deux éléments a et b, on forme un nouvel élément appelé **couple** (a, b) défini de sorte que :
$(a, b) = (a', b') \iff a = a'$ et $b = b'$

Exemple 7. $(3,5)$ est un couple, $(5,3)$ également, mais $(3,5) \neq (5,3)$ alors que $\{3,5\} = \{5,3\}$.

Définition du produit cartésien de deux ensembles

On appelle **produit cartésien** de E par F l'ensemble des couples (a, b) avec a dans E et b dans F. On le note $E \times F = \{(a, b) \mid a \in E, b \in F\}$

Exemple 8. Si $E = \{1,2\}$ et $F = \{2,3,4\}$, alors $E \times F =$

Remarque 9. Si $E \neq F$, $E \times F \neq F \times E$. Ici l'ordre des éléments compte dans le couple.

Définition d'un n-uplet et du produit cartésien de n ensembles

Si $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, … $x_n \in E_n$, alors on introduit un nouvel objet appelé **n-uplet** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de sorte que :

$$\forall x_1, y_1 \in E_1, \ldots, \forall x_n, y_n \in E_n \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \iff \forall i \in [\![1 ; n]\!] \quad x_i = y_i$$

On note $E_1 \times \ldots \times E_n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec x_i parcourant E_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Exemple 9. $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets de réels, $\mathbb{R}^n$ désigne l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de réels.

1.2.5 Parties d'un ensemble

Définition de l'ensemble des parties d'un ensemble

On appelle **ensemble des parties** de E l'ensemble, noté $\mathscr{P}(E)$, qui contient exactement les sous-ensembles de E.

Remarque 10. $\mathscr{P}(E)$ est un ensemble d'ensembles : $F \in \mathscr{P}(E)$ ssi $F \subset E$.

Exemple 10. Calculer $\mathscr{P}(\{1\})$, $\mathscr{P}(\{1,2\})$ et $\mathscr{P}(\{1,2,3\})$.

Remarque 11. $\{\varnothing\}$ n'est pas l'ensemble vide mais un ensemble constitué d'un unique élément qui est l'ensemble vide.

Attention à ne pas confondre inclusion et appartenance

Si $E = \{1,2,3\}$, alors il est vrai que $1 \in E$, $\{1\} \subset E$ et que $\{1\} \in \mathscr{P}(E)$. Par contre, $\{1\} \notin E$ et $1 \not\subset E$. .

2 Applications

2.1 Définition

Définition d'une application (ou d'une fonction)

Soient E et F deux ensembles. On appelle **application/fonction** de E vers F un procédé f qui, à tout élément de $x \in E$, associe un unique élément dans F noté $f(x)$. E est **l'ensemble de départ** et F est **l'ensemble d'arrivée** de f. Soit $x \in E$ et $y = f(x) \in F$, on dit que y est l'**image** de x par f, on dit aussi que x est **un antécédent** de y par f. On note $f\colon \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ ou $f\colon E \to F$. L'ensemble des fonctions de E vers F se note $\mathscr{F}(E,F)$ ou F^E.

Exemple 11.

- $f\colon \begin{cases} \{-1,0,1,2\} \longrightarrow \{0,1,4,5\} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ est une fonction.
- La fonction $\mathrm{Id}_E\colon \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{cases}$ est **l'application identité** de E.
- Soit $c \in F$, la fonction $\begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto c \end{cases} \in \mathscr{F}(E,F)$ est une **application constante**.
- Soit $A \subset E$, on appelle **indicatrice de** A l'application $\mathbb{1}_A\colon \begin{cases} E \longrightarrow \{0,1\} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{cases} \in \{0,1\}^E$. Cette application traduit l'appartenance à la partie A : $\forall x \in E \qquad x \in A \iff \mathbb{1}_A(x) = 1$

Péril imminent à ne pas confondre fonction avec élément

Si $x \in E$, $f(x)$ n'est pas une fonction, $f(x)$ n'est qu'un élément de F.

Définition du graphe d'une fonction

Soit $f\colon E \to F$. On appelle **graphe de l'application** f l'ensemble $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$.

Remarque 12. Soient f et g deux fonctions, on dit que $f = g$ si f et g ont le même ensemble de départ E, le même ensemble d'arrivée F et pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

2.2 Restriction et prolongement

Définition de la restriction d'une application

Soit $f\colon E \to F$ et soit A une partie de E. On appelle **restriction de f à l'ensemble** A l'application $f_{|A}\colon \begin{cases} A \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$

Exemple 12. Les fonctions $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ et $g\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ sont différentes, g est la restriction de f sur $\mathbb{R}_+$.

Définition d'un prolongement d'une application

Soit $f\colon A \to F$ avec $A \subset E$. On appelle **prolongement de f sur E** toute fonction $g\colon E \to F$ telle que $g_{|A} = f$ (autrement dit, pour tout $x \in A$, $g(x) = f(x)$).

Exemple 13. Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x} \end{cases}$. Posons $g(x) = \begin{cases} 42 & \text{si} \quad x = 0 \\ f(x) & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$, alors g est un prolongement de f sur $\mathbb{R}$.

Remarque 13. Lorsqu'on prolonge, il serait donc cohérent de nommer la nouvelle fonction différemment de la fonction d'origine. Cependant, par abus, il se peut que cela ne soit pas le cas dans un sujet de concours.

2.3 Image directe et image réciproque d'une fonction

Définition de l'image directe d'une fonction

Soit $f\colon E \mapsto F$ et A une partie de E, on appelle **image directe de A par f** l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A \quad y = f(x)\}$$

Remarque 14. L'ensemble $f(A)$ est défini par compréhension, si $y = f(x)$ avec $x \in A$ c'est $y \in f(A)$ et non x. $f(A)$ est un sous-ensemble de F qui tous les $f(x)$ pour $x \in A$. Pour $y \in F$: $\quad y \in f(A) \iff \exists x \in A \quad y = f(x)$

Proposition n° 4 : images directes et inclusion

Soit $f\colon E \to F$. Soient A et A' deux parties de E. Si $A \subset A'$ alors $f(A) \subset f(A')$.

Remarque 15. Si A et A' sont deux parties de E, alors $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.

Exemple 14. Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$. Déterminer $f([-1\,;2\,])$ puis $f(\mathbb{R})$.

Attention à ne pas confondre ensemble d'arrivée et image

Si $f\colon E \to F$, il n'y a aucune raison pour que l'image de f par E vaille F, on a seulement $f(E) \subset F$.

Définition de l'image réciproque d'une fonction

Soit $f\colon E \to F$ et B une partie de F, on appelle **image réciproque de B par f** l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Remarque 16. L'ensemble $f^{-1}(B)$ est défini par compréhension, si $f(x) \in B$ alors $x \in f^{-1}(B)$ et non $f(x)$. $f^{-1}(B)$ est une partie de E qui contient les antécédents par f de tous les éléments de B. Pour $x \in E$: $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

Exemple 15. Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$. Déterminer $f^{-1}([-1, 2])$ puis $f^{-1}(\mathbb{R})$.

Remarque 17. Si $f\colon E \to F$, alors $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ et $f^{-1}(F) = E$.

Proposition n° 5 : images réciproques et inclusion

Soit $f\colon E \to F$. Soient B et B' deux parties de F. Si $B \subset B'$ alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

Attention il n'y a pas de raison pour que $f^{-1}(f(A)) = A$ ou pour que $f(f^{-1}(B)) = B$
Attention, ici, f^{-1} ne désigne pas la bijection réciproque de f parce que f n'est pas forcément bijective.

Exemple 16. Calculer $f^{-1}(f([-1\,;2\,]))$ et $f(f^{-1}([-1\,;2\,]))$ pour $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$.

2.4 Composition de fonctions

Définition de la composition de fonctions

Soit $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$. On définit alors une nouvelle fonction, nommée $g \circ f$ par : $g \circ f\colon \begin{cases} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{cases}$.

Proposition n° 6 : propriétés sur la composition
Soit $f\colon E \to F$, $g\colon F \to G$ et $h\colon G \to H$, $\quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \qquad \mathrm{Id}_F \circ f = f \qquad f \circ \mathrm{Id}_E = f$

Remarque 18. Lorsque $G = E$, on peut à la fois définir $f \circ g$ et $g \circ f$, mais en général, $f \circ g \neq g \circ f$. Si $E = F = G$ et $f \circ g = g \circ f$, on dit alors que f **et** g **commutent**.

Exemple 17. Est-ce que $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \exp(x) \end{cases}$ et $g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ commutent ?

2.5 Applications injectives

Définition de l'application injective

On dit que $f\colon E \to F$ est **injective** (ou est **une injection**) si tout élément de F a au plus un antécédent par f :

$$\forall (x, x') \in E^2 \qquad f(x) = f(x') \quad \Longrightarrow \quad x = x'$$

Remarque 19. On peut aussi le formuler par contraposée :

Attention à ne pas confondre avec la réciproque :
«$\forall (x, x') \in E^2 \quad x = x' \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f(x')$» est vraie pour toutes les fonctions y compris les non injectives.

Remarque 20. f n'est pas injective ssi

Exemple 18. Les applications $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2-5x \end{cases}$, $g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$, $h\colon \begin{cases} [\,0\,;\pi\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$ sont-elles injectives ?

Proposition n° 7 : une application strictement monotone est injective
Si $A \subset \mathbb{R}$ et que $f\colon A \to \mathbb{R}$ est strictement monotone, alors f est injective.

Proposition n° 8 : composée de deux injections
Si $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ sont deux fonctions injectives, alors $g \circ f\colon E \to G$ est injective.

2.6 Applications surjectives

Définition d'une application surjective

On dit que $f\colon E \to F$ est **surjective** (ou est **une surjection**) si tout élément de F a au moins un antécédent par f :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \qquad y = f(x)$$

Remarque 21. Pour justifier la surjectivité de $f : E \to F$, il suffit, pour chaque $y \in F$, de justifier l'existence d'une solution à l'équation $y = f(x)$.

Remarque 22. $f\colon E \to F$ n'est pas surjective si :

Exemple 19. Les applications $f\colon \begin{cases} [\,0\,;\pi\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \quad \longmapsto \cos(x) \end{cases}$, $g\colon \begin{cases} [\,0\,;\pi\,] \longrightarrow [\,-1\,;1\,] \\ \quad x \quad \longmapsto \cos(x) \end{cases}$ sont-elles surjectives ? Si l'une l'est et pas l'autre, c'est bien parce qu'en dépit des apparences, ce sont deux applications différentes.

Remarque 23. $f\colon E \to F$ est surjective est équivalent à $f(E) = F$.

Remarque 24. Si $f\colon E \to F$, alors nécessairement $g\colon \begin{cases} E \longrightarrow f(E) \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est surjective.

Proposition n° 9 : composée de deux surjections

Si $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ sont deux fonctions surjectives, alors $g \circ f\colon E \to G$ est surjective.

2.7 Applications bijectives

Définition d'une application bijective

On dit que $f\colon E \to F$ est **bijective** (ou est une **bijection**) si tout élément de F a exactement un antécédent par f :

$$\forall y \in F \quad \exists! x \in E \qquad y = f(x)$$

Exemple 20. $f\colon \begin{cases} [\,0\,;\pi\,] \longrightarrow [\,-1\,;1\,] \\ \quad x \quad \longmapsto \cos(x) \end{cases}$ est bijective, contrairement à $g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [\,-1\,;1\,] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$.

Proposition n° 10 : caractérisation de la bijectivité

Soit $f\colon E \to F$. On a équivalence entre :

1. f est bijective.
2. f est injective et surjective.
3. Il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Si c'est le cas l'application g ci-dessus est unique. On l'appelle **application réciproque** de f et on la note f^{-1}.

Proposition n° 11 : propriétés de la bijection réciproque

1. Si $f\colon E \to F$ est bijective alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$
2. Si $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ sont bijectives alors $g \circ f$ aussi et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
3. Si f est bijective et $B \subset F$, alors $f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$