Calcul de limites et continuité en un point

Exercice 1 ($\star$ Cal)**.** Déterminer les limites suivantes

1. $x \mapsto \dfrac{x^4 - x^3}{x^3 - 2}$ en $+\infty$
2. $x \mapsto \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$
3. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0
4. $x \mapsto x^x$ en 0^+
5. $x \mapsto \dfrac{\sin(3x)}{2x}$ en 0
6. $x \mapsto \dfrac{x\cos(x)}{x^3+1}$ en $+\infty$
7. $x \mapsto \cos(2x)\mathrm{e}^{-3x}$ en $+\infty$
8. $x \mapsto \mathrm{e}^{x-\sin(x)}$ en $+\infty$

Exercice 2 ($\star$ Rai)**.**

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xE(x)$. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Peut-on la prolonger par continuité en 0 ? Tracer la représentation graphique de f sur $[\,0\,;1\,]$.

Exercice 3 ($\star$ Rai)**.**

1. Montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Montrer que la fonction f n'admet pas de limite en 0.
3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Montrer que la fonction f peut être prolongée par continuité en 0.

Exercice 4 ($\star$ Rai ©)**.** Soit la fonction g définie sur $[\,0\,;1\,]$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{E\left(\dfrac{1}{x}\right)} & \text{pour} \quad x > 0 \\ 0 & \text{pour} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de g en 0.
2. Tracer la représentation graphique de g sur $[\,0\,;1\,]$.

Exercice 5 ($\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 ($\star$ Cal)**.** Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en 0, si oui quelles sont leur prolongement par continuité :

1. $t \mapsto \dfrac{\tan(t)}{t}$
2. $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t}$
3. $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$
4. $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t}$

Continuité sur un intervalle

Exercice 7 ($\star$ Rai)**.** Étudier la continuité de $x \mapsto E(x) + \sqrt{x - E(x)}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 ($\star$ Rai, Com ©)**.** Montrer que l'équation $x = \mathrm{e}^{-x}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. Puis montrer que cette solution est dans $[\,1/2\,;1\,]$.

Exercice 9 ($\star$ Rai, Com)**.** Montrer que l'équation $\cos(x) = 1/x$ a une infinité de solutions sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 10 ($\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ une fonction continue. Que peut-on dire de f ?

Exercice 11 (𝄞$\star$ Rai ©)**.** Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = g(r)$. Montrer que $f = g$.

Exercice 12 (𝄞$\star\star$ Rai ©)**.**

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, périodique et admettant une limite en $+\infty$. Montrer que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.
2. Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 ($\star$ Rai ©)**.** Soit f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on suppose f continue sur $\mathbb{R}$ et g bornée sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $g \circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. $\star\star$ Montrer que $f \circ g$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 (𝄞$\star$ Rai, Rec ©)**.**

1. Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],[\,a\,;b\,])$. Montrer qu'il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(c) = c$.
2. $\star\star$ Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ décroît, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 15 (𝄞$\star\star$ Rai, Rec ©)**.**

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, déterminer les limites de $x \mapsto P(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle (sans utiliser le théorème de d'Alembert-Gauss [1]).
3. Donner un contre-exemple dans le cas d'un polynôme de degré pair.

Exercice 16 (♪★★ Rai ©)**.** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Montrer que f s'annule sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 (★★ Rai, Rec ©)**.** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 (♪★★ Rai ©)**.** Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue ayant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 19 (★ Rai)**.** Étudier la continuité des fonctions suivantes aux points demandés.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ en 0.
2. $x \mapsto \dfrac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^x}$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

Exercice 20 (★★ Rec, Rai)**.** Soit un entier $n \geqslant 2$. On s'intéresse à l'équation (E_n), $x^n + x^{n-1} + \ldots + x = 1$.

1. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ que l'on notera x_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2} < x_n < 1$.
3. En calculant $f_{n+1}(x_n)$, montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
4. En déduire que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente et on note ℓ sa limite.
5. Montrer que $\ell < 1$.
6. Montrer que $\ell = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 21 (★ Rai)**.** Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\max(a,b) = \dfrac{1}{2}(|a-b| + a + b)$.
3. Montrer que la fonction $\max(f,g)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1. Justement, une des preuves de ce théorème (que nous avons admis) utilise comme première étape que tout polynôme de degré impair à coefficients réels admet bien une racine réelle.

Exercice 22 (★★ Rai, Rec)**.** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique de période $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x+t) = f(x)$.

Exercice 23 (♪★★ Rai, Rec ©)**.** Soit I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que $f\colon I \to I$ est lipschitzienne sur I lorsque

$$\exists k > 0 \quad \forall (x,x') \in I^2 \qquad |f(x) - f(x')| \leqslant k|x - x'|$$

1. Soit f lipschitzienne sur I. Montrer que f est continue sur I.
2. On considère $I = [\,0\,;+\infty\,[$ et f k-lipschitzienne sur I avec $k \in\,]\,0\,;1\,[$. Montrer qu'il existe un unique $c \in [\,0\,;+\infty\,[$ tel que $f(c) = c$.
3. Toujours avec $k \in\,]\,0\,;1\,[$. Montrer que la suite définie par $u_0 \in [\,0\,;+\infty\,[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers c.

Exercice 24 (★★★ Rec ©)**.**

1. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et surjective, montrer que tout $y \in \mathbb{R}$ admet une infinité d'antécédents.
2. Donner un exemple d'une telle fonction.

Exercice 25 (★★★ Rec ©)**.** Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $x \in [\,0\,;1-1/n\,]$ tel que $f(x) = f(x+1/n)$ (on dit que $1/n$ est une corde de f).
2. Montrer que si $\alpha \in\,]\,0\,;1\,]$ mais que $1/\alpha \notin \mathbb{N}$, alors il existe $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$ sans que α soit une corde de f.

Exercice 26 (★★★ Rai, Rec)**.** Soit I un segment et $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$. On note $S = \sup(f(I))$ (éventuellement infini si f n'est pas majorée).

1. En distinguant les cas, suivant que f soit ou non majorée, construire une suite $(u_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ tel que $f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} S$.
2. En utilisant le résultat de l'exercice 30 du TD7, montrer qu'il existe une suite $(v_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ convergente telle que $f(v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} S$.
3. On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Montrer que $\ell \in I$ et $f(\ell) = S$.
4. En déduire le théorème des bornes atteintes.

Soient $R > 0$, $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\}$ (disque de centre 0 et de rayon R) et $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur D, i.e. pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in D \qquad |z - z_0| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - f(z_0)| \leqslant \varepsilon$$

5. Montrer que f est encore bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe z_1 et z_2 dans D tel que pour tout $z \in D$, $f(z_1) \leqslant f(z) \leqslant f(z_2)$.