# Nombres réels

**Exercice 1** ($\star$ Rai ©)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de $n$ est $E(\log_{10}(n)) + 1$.

**Exercice 2** (𝄞$\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application non nulle définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,x) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+x') = f(x) + f(x') \quad \text{et} \quad f(xx') = f(x)f(x')$$

1. Montrer que $f(1) = 1$, puis $f(x) = x$ pour $x \in \mathbb{N}$, puis $x \in \mathbb{Z}$, puis $x \in \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$ puis que $f$ est croissante.
3. Montrer que $f(x) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$ à l'aide de suites de rationnels convergeant vers $x$.

**Exercice 3** ($\star$ Rai ©)**.** Montrer que la fonction $x \mapsto E(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto x - E(x)$ est 1-périodique sur $\mathbb{R}$ et tracer sa courbe.

**Exercice 4** ($\star$ Rai, Cal)**.** Montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $\left\lfloor \dfrac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n-m+1}{2} \right\rfloor = n$

**Exercice 5** ($\star$ Rai, Cal)**.** On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

1. Montrer que $h\colon x \mapsto \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer l'égalité souhaitée.

**Exercice 6** ($\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soient $A$ et $B$ deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $A \subset B$ alors $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.
2. Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$

**Exercice 7** ($\star\star$ Rai, Rec)**.** Soient $A$ et $B$ deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b \mid (a,b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure.
2. Montrer que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

**Exercice 8** ($\star$ Rai)**.** Pour chacun des ensembles suivants, étudier l'existence d'un maximum d'un minimum, d'une borne supérieur :, d'une borne inférieure

1. $A = \left\{ \dfrac{2^n}{2^n - 1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$
2. $B = \left\{ \dfrac{x^2+2}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$
3. $C = \left\{ \dfrac{nm}{(n+m)^2} \mid (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$
4. $D = \{\sqrt{x} - E(\sqrt{x}) \mid x \in \mathbb{N}\}$

**Exercice 9** ($\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit $f\colon [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ une fonction croissante et $E = \{x \in [\,0\,;1\,] \mid f(x) \geqslant x\}$.

1. Montrer que $E$ admet une borne supérieure.
2. On note $s = \sup(E)$. Montrer que $f(s) = s$.

**Exercice 10** ($\star\star\star$ Rai, Rec)**.** Soit $O$ une partie de $\mathbb{R}$ (pas nécessairement un intervalle). On dit que $O$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ si pour tout $x \in O$, il existe $\delta > 0$ tel que $]\,x-\delta\,; x+\delta\,[ \subset O$.

1. Montrer que les intervalles $\varnothing$, $]\,{-\infty}\,; b\,[$, $]\,a\,; {+\infty}\,[$, $\mathbb{R}$ et $]\,a\,; b\,[$ sont ouverts (ce qui justifie leur nom d'intervalles ouverts) contrairement à $[\,0\,;1\,]$.
2. Montrer que si pour tout $i \in I$ ($I$ un ensemble), $O_i$ est un ouvert, alors $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un ouvert.
3. Montrer que si pour tout $i \in [\![\,1\,; n\,]\!]$, $O_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
4. Est-ce $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \,]\,{-1/n}\,; 1/n\,[$ est ouvert ?

On dit qu'une partie $F$ de $\mathbb{R}$ est fermé si $\mathbb{R} \backslash F$ est ouverte.

5. Montrer que les intervalles $\varnothing$, $[\,a\,; {+\infty}\,[$, $]\,{-\infty}\,; b\,]$, $\mathbb{R}$ et $[\,a\,; b\,]$, sont fermés (ce qui justifie leur nom d'intervalles fermés) contrairement à $]\,0\,; {+\infty}\,[$.
6. Soit $F$ un fermé de $\mathbb{R}$. Montrer que pour toute suite $(x_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ convergente, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \in F$.
7. Réciproquement, soit $F \subset \mathbb{R}$. si pour tout suite $(x_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ convergente, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \in F$, montrer alors que $F$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

**Exercice 11** ($\star\star\star$ Rec)**.** Soit $(I_n)_n$ une suite de segments emboîtés : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = [\, a_n\,; b_n\,]$ avec $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ et $a_n < b_n$, $I_n \subset I_{n+1}$.

1. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \varnothing$.
2. Si de plus, $b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, montrer que l'intersection est un singleton.

## Suites

**Exercice 12** ($\star$ Rai ©)**.**

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite arithmétique de raison $r$. Montrer que :
$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$$
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de raison $q$. Montrer que :
$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n^2 = u_{n-1} \times u_{n+1}$$
3. $\star\star$ Les réciproques des questions 1 et 2 sont-elles Vraies ou fausses ?

**Exercice 13** ($\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit $(u_n)_n$ une suite d'entiers convergente. Montrer qu'elle est stationnaire et en déduire que sa limite est nécessairement entière.

**Exercice 14** ($\star$ Rai, Cal)**.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :
$$u_0 = 1 \quad v_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \mid u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 3v_n + 2u_n$$

1. Calculer $u_1$, $v_1$, $u_2$ et $v_2$.
2. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
4. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 15** ($\star$ Cou, Cal)**.** Déterminer le terme général des suites définies par :

1. $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
3. $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.
4. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

**Exercice 16** ($\star$ Cal)**.** Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ Étudier la convergence des suites définies par :

1. $\dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$
2. $\dfrac{n^3 + 5n}{4n^3 - \cos(n) + \dfrac{2}{n^2}}$
3. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
4. $(\ln n)^{\frac{1}{n}}$
5. $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$
6. $\dfrac{\lfloor na \rfloor}{a}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$
8. $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$
9. $\sin(n^3)\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,3}}{2}\right)^n$

**Exercice 17** ($\star$ Cal)**.** Prouver que les suites ci-dessous sont adjacentes et étudier leurs natures :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1} \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$$

**Exercice 18** ($\star\star$ Rai)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante, convergeant vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

1. Montrer que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *(théorème des séries alternées qui sera au programme de PC/PSI)*.

**Exercice 19** ($\star$ Rai)**.** On note $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente [1].

**Exercice 20** ($\star$ Cal)**.** Étude des suites définies par :

1. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + u_n^2$.
2. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n^2}{4}$.
3. $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 1$.
4. $u_1 = 2023$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n}$.

1. On peut montrer que sa limite est $\frac{\pi^2}{6}$ mais c'est une autre histoire.

5. $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$.

**Exercice 21** (⋆⋆ Rai, Rec ©). On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n}$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $0 < x_n < 1$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

**Exercice 22** (⋆⋆ Cal, Rai ©).

1. Rappeler les formules de trigonométrie donnant $2\cos a \cos b$ et $\cos 2a$.
2. En déduire que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

**Exercice 23** (⋆⋆ Rai). Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.

1. Étudier la suite $(z_n)_n$ dans le cas où $z_0 \in \mathbb{R}$.
2. Représenter graphiquement $z_n$ et $z_{n+1}$.
3. Pour $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, étudier la convergence de $(z_n)_n$.

**Exercice 24** (⋆ Cal). Classer par ordre de négligeabilité :

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{\ln(n)}{n}, \frac{\ln(n)}{n^2}, \frac{1}{n\ln(n)}$$

**Exercice 25** (⋆ Cal). Déterminer un équivalent simple des suites définis par :

1. $(1+\dfrac{2}{n})(3n-\ln(n))^2$
2. $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$
3. $\dfrac{2\ln(n)-n}{3n+\sqrt{n}}$
4. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
5. $\dfrac{n^2+\cos(n)}{2^n+\sin(n^2)}$
6. $\ln(n+1)$

**Exercice 26** (⋆⋆ Rai, Rec).

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution. On la note $x_n$.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. En déduire le comportement de la suite $(x_n)_n$ en $+\infty$.
3. Montrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
4. Montrer que $\dfrac{1}{n} - x_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^4}$.
5. En déduire $x_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$.

**Exercice 27** (𝄞⋆⋆ Rai, Rec ©). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (suite harmonique) est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
3. En déduire que $H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
4. Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n+1)$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$.

5. Montrer que ces suites sont adjacentes.
6. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$. La constante $\gamma$ s'appelle la constante d'Euler.
7. Montrer que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

**Exercice 28** (⋆⋆ Rai ©). Soit $(u_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$ injective (pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $u_n = u_m$ implique $n = m$). Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

**Exercice 29** (𝄞⋆⋆⋆ Rai, Rec ©). Soit $u$ une suite réelle et soit $v$ la suite suite réelle définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n = \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n}$$

1. Montrer que si $u$ est bornée alors $v$ est bornée. Que pensez-vous de la réciproque ?
2. (YT) Montrer que si $u$ converge alors $v$ converge vers la même limite (c'est le théorème de Cesàro). Que pensez-vous de la réciproque ?
3. Montrer que si $u$ est croissante alors $v$ est croissante.

**Exercice 30** (⋆⋆⋆ Rai, Rec ©). Soit $(u_n)_n$ une suite réelle bornée.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sup\{u_k \mid k \geqslant n\}$, montrer que $v_n$ est bien définie.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.
3. Soit $\ell \in \mathbb{R}$, on suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe un entier $n \geqslant N$ tel que $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Montrer que dans ces conditions, il existe une suite extraite de $(u_n)_n$ qui converge vers $\ell$.
4. Conclure que pour toute suite réelle bornée $(u_n)_n$, il existe une suite extraite de $(u_n)_n$ qui converge.
5. Soit $(z_n)_n$ une suite complexe bornée, montrer qu'il existe une suite extraite de $(z_n)_n$ qui converge.

Ceci est une réciproque partielle de toute suite convergente est bornée. Ce résultat, hors programme de PCSI/PSI/PC, s'appelle le théorème de Bolzano-Weierstrass.